1

Cadre d'évaluation de la culture mathématique du cycle PISA 2012

Le cadre conceptuel du cycle PISA 2012 explique les fondements théoriques des épreuves PISA de mathématiques. Il actualise la définition de la culture mathématique et décrit les processus mathématiques que les élèves effectuent lorsqu'ils utilisent leur culture mathématique et les facultés mathématiques fondamentales qui sous-tendent ces processus. Il présente la répartition des connaissances mathématiques entre quatre catégories de contenus mathématiques ainsi que les connaissances qu'il est pertinent d'évaluer en mathématiques chez les élèves âgés de 15 ans. Il décrit les quatre catégories de contextes, c'est-à-dire les situations dans lesquelles les élèves auront à mener à bien des tâches mathématiques. Il indique les pourcentages d'items par catégorie de contenus et de contextes, par format d'items et par processus, et décrit la rotation des unités par carnet. Chaque carnet est constitué d'items dont le degré de difficulté varie. Par ailleurs, le présent cadre décrit l'épreuve informatisée de mathématiques et explique la logique qui a présidé à sa conception ainsi que son potentiel de développement. Sept unités administrées lors d'essais de terrain ou de campagnes définitives sont proposées pour illustrer les catégories retenues. De nombreuses mesures de contrôle de la qualité sont décrites. L'évaluation PISA permettra de déterminer dans quelle mesure les pays préparent leurs élèves à utiliser les mathématiques dans tous les aspects de leur vie personnelle, civique et professionnelle, dans le cadre d'une citoyenneté constructive, engagée et réfléchie.

INTRODUCTION

L'évaluation de la culture mathématique revêt une importance particulière dans le cadre du cycle PISA 2012, car c'est son domaine majeur d'évaluation. L'enquête PISA a déjà évalué la culture mathématique en 2000, 2003, 2006 et 2009, mais une fois seulement à titre de domaine majeur d'évaluation, en l'occurrence en 2003.

Comme les mathématiques sont une nouvelle fois le domaine majeur d'évaluation d'un cycle PISA, c'est l'occasion de suivre l'évolution de la performance des élèves au fil du temps et de réexaminer les aspects évalués à la lumière des changements intervenus dans la discipline ainsi que dans les politiques et pratiques pédagogiques en la matière. Tout l'enjeu est donc d'actualiser le cadre d'évaluation de la culture mathématique, tout en conservant les liens psychométriques avec les évaluations antérieures au travers d'une ligne tendancielle prospective et rétrospective. Le cadre d'évaluation du cycle PISA 2012 cherche à décrire de façon plus claire et explicite les aspects mathématiques pertinents pour des élèves âgés de 15 ans, tout en assurant que les items administrés s'inscrivent dans des contextes authentiques et porteurs de sens. Le cycle de modélisation mathématique utilisé dans les cadres précédents (voir, par exemple, OCDE, 2003) pour décrire les étapes que les individus enchaînent pour résoudre des problèmes contextualisés reste la clé de voûte du cadre d'évaluation du cycle PISA 2012. Il est employé pour définir les processus mathématiques dans lesquels les élèves s'engagent quand ils résolvent des problèmes – ces processus seront utilisés pour la première fois comme dimension première de compte rendu. Une nouvelle option d'épreuve informatisée de mathématiques (*Computer-Based Assessment of Mathematics*, CBAM) est également proposée en 2012.

Le cadre d'évaluation de la culture mathématique du cycle PISA 2012 se divise en plusieurs grandes sections. La première section, « Définition de la culture mathématique », décrit les fondements théoriques de l'épreuve PISA de mathématiques et définit le *construct*[1] de culture mathématique. La deuxième section, « Organisation du domaine », décrit trois aspects : *i)* les processus mathématiques et les facultés mathématiques fondamentales (appelées « compétences » dans les cadres d'évalutaion antérieurs) qui sous-tendent ces processus ; *ii*) les catégories de contenus mathématiques pertinentes pour les élèves âgés de 15 ans et la façon dont elles s'organisent dans le cadre d'évaluation du cycle PISA 2012 (les scores des élèves sont rapportés à la fois en fonction des trois catégories de processus mathématiques et en fonction des quatre catégories de contenus mathématiques) ; et *iii)* les contextes dans lesquels s'inscrivent les tâches mathématiques soumises aux élèves. La troisième section, « Évaluation de la culture mathématique », décrit des enjeux structurels de l'épreuve et fournit des informations d'ordre technique. Les annexes décrivent les facultés mathématiques fondamentales de manière plus détaillée et proposent des items PISA à titre d'exemple. Les références bibliographiques figurent également en annexe.

Ce cadre a été rédigé sous la direction du groupe d'experts chargé des mathématiques (*Mathematics Expert Group*, MEG), constitué par les principaux contractants PISA après approbation du Comité directeur PISA (*PISA Governing Board*, PGB). Siègent dans ce groupe de dix membres des mathématiciens, des professeurs de mathématiques et des spécialistes en évaluation, en technologie et en pédagogie de divers pays. Par ailleurs, une version préliminaire de ce cadre d'évaluation de la culture mathématique a été soumise pour commentaires à plus de 170 experts en mathématiques de plus d'une quarantaine de pays, dans le but de susciter l'apport de contributions plus larges et de garantir sa révision approfondie. *Achieve* et l'*Australian Council for Educational Research* (ACER), les deux organisations choisies par l'Organisation de coopération et de développement économiques (OCDE) pour gérer l'élaboration du cadre d'évaluation, ont également mené diverses recherches pour éclairer la conception du cadre et l'étayer. L'enquête PISA et l'élaboration du cadre d'évaluation ont bénéficié des travaux actuels dans des pays participants (par exemple, les recherches décrites dans la publication de l'OCDE *Pathways to Success: How Knowledge and Skills at Age 15 Shape Future Lives in Canada*, 2010).

DÉFINITION DE LA CULTURE MATHÉMATIQUE

Comprendre les mathématiques est essentiel pour préparer les jeunes à vivre dans une société moderne. Il faut s'appuyer sur un certain degré de compréhension des mathématiques et sur des facultés de raisonnement mathématique et d'utilisation des mathématiques pour pouvoir appréhender un nombre croissant de situations et de problèmes qui surviennent dans la vie courante, y compris dans le cadre professionnel, et pouvoir y faire face. Les mathématiques sont un outil indispensable pour permettre aux jeunes d'apprhénender les problèmes qui surviennent dans différents contextes – personnel, professionnel, sociétal ou scientifique. Dans ce contexte, il est important de déterminer dans quelle mesure les jeunes approchant du terme de leur scolarité sont préparés à utiliser les mathématiques pour comprendre des enjeux importants et résoudre des problèmes. Évaluer les jeunes à l'âge de 15 ans permet de montrer par anticipation comment les individus sont susceptibles de réagir plus tard dans la vie dans un large éventail de situations en rapport avec les mathématiques.

Il est raisonnable de se poser la question suivante pour déterminer ce qui doit être à la base d'une évaluation internationale à administrer aux élèves âgés de 15 ans : « Qu'est-ce qu'il est important que les citoyens sachent et soient capables de faire dans des situations en rapport avec les mathématiques ? ». Ou plus précisément, que signifie la culture mathématique à l'âge de 15 ans, que ce soit dans la perspective de quitter l'école, de suivre une formation professionnelle ou d'entrer à l'université ? Il est important d'expliquer ici que le *construct* de culture mathématique, qui est utilisé dans ce rapport pour évoquer la capacité des individus à formuler, employer et interpréter les mathématiques dans divers contextes, ne peut s'assimiler à un niveau minimal, peu élevé, de connaissances et compétences. Au contraire, ce *construct* cherche à définir la capacité des individus à mener un raisonnement mathématique et à utiliser des concepts, procédures, faits et outils mathématiques pour décrire, expliquer et prévoir des phénomènes. Cette conception de la culture mathématique confirme combien il est important que les élèves parviennent à bien comprendre des concepts de mathématiques pures et à se rendre compte des avantages qu'il y a à s'engager dans l'exploration du monde abstrait des mathématiques. Le *construct* PISA de culture mathématique insiste fortement sur la nécessité de développer chez les élèves la faculté d'utiliser les mathématiques en contexte ; il est important qu'ils vivent de riches expériences lors de leurs cours de mathématiques pour y parvenir. C'est vrai pour tous les élèves âgés de 15 ans, qu'ils approchent du terme de leur formation en mathématiques ou qu'ils la poursuivent. De plus, beaucoup estiment que la plupart des élèves sont plus motivés à l'idée d'apprendre les mathématiques lorsqu'ils sont conscients que ce qu'ils apprennent est utile non seulement dans d'autres matières, mais également en dehors du cadre scolaire.

La culture mathématique transcende bien entendu les groupes d'âge. Toutefois, pour l'évaluer chez les élèves âgés de 15 ans, il faut tenir compte de caractéristiques pertinentes propres à ces élèves ; d'où la nécessité d'identifier des contenus appropriés à leur âge, leur langage et leurs contextes. Ce cadre distingue plusieurs grandes catégories de contenus qui sont importantes dans la culture mathématique des individus en général et de contenus spécifiques qui sont appropriés pour les élèves âgés de 15 ans. La culture mathématique n'est pas un attribut que les individus possèdent ou non. C'est un attribut qui se situe sur un *continuum*, certains individus possédant une plus grande culture mathématique que d'autres – mais tous les individus peuvent la développer.

La culture mathématique se définit comme suit dans le cadre du cycle PISA 2012 :

> *La culture mathématique est l'aptitude d'un individu à formuler, employer et interpréter des mathématiques dans un éventail de contextes, soit de se livrer à un raisonnement mathématique et d'utiliser des concepts, procédures, faits et outils mathématiques pour décrire, expliquer et prévoir des phénomènes. Elle aide les individus à comprendre le rôle que les mathématiques jouent dans le monde et à se comporter en citoyens constructifs, engagés et réfléchis, c'est-à-dire à poser des jugements et à prendre des décisions en toute connaissance de cause.*

Quelques explications sont fournies ci-dessous pour clarifier et mettre en lumière certains aspects de la définition qui sont particulièrement importants.

PISA 2012 : Des élèves acteurs de la résolution de problèmes

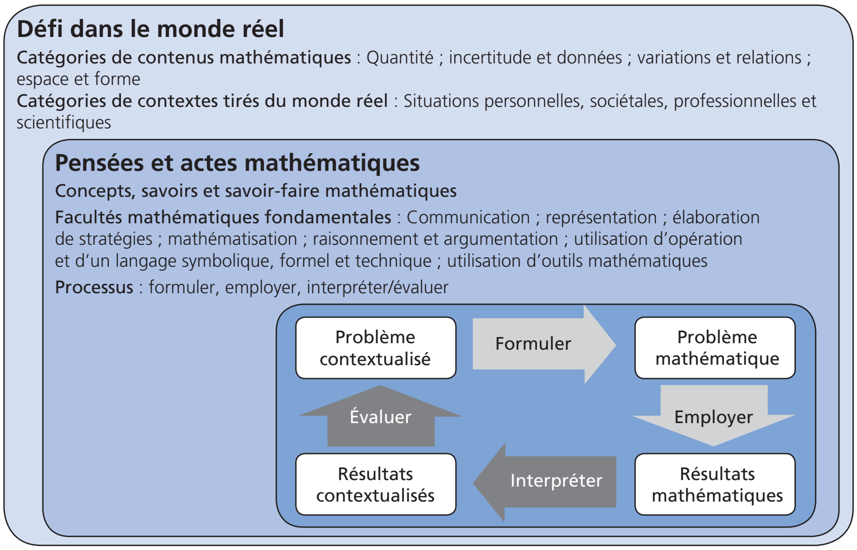
La définition de la culture mathématique insiste sur la notion d'engagement actif dans les mathématiques et vise le raisonnement mathématique et l'utilisation de concepts, procédures, faits et outils mathématiques pour décrire, expliquer et prévoir des phénomènes. Les verbes « formuler », « employer » et « interpréter » désignent plus particulièrement les trois processus dans lesquels les élèves s'engagent en tant qu'acteurs de la résolution de problèmes. Le fait de *formuler* les choses de façon mathématique consiste à identifier des possibilités d'appliquer et d'utiliser les mathématiques – c'est-à-dire de se rendre compte que les mathématiques peuvent servir à comprendre ou résoudre tel ou tel problème –, soit appréhender une situation telle qu'elle se présente, la traduire sous une forme qui se prête à un traitement mathématique, générer une structure ou des représentations mathématiques, identifier des variables et faire des hypothèses simplificatrices qui aideront à résoudre le problème ou à relever le défi. Le fait d'*employer* les mathématiques consiste à suivre un raisonnement mathématique et à utiliser des concepts, procédures, faits et outils mathématiques pour dégager une solution mathématique, c'est-à-dire à effectuer des calculs, à manipuler des opérations algébriques, des équations ou d'autres modèles mathématiques, à analyser des données de façon mathématique dans des graphiques ou des diagrammes mathématiques, à élaborer des descriptions ou des explications mathématiques et à utiliser des outils mathématiques pour résoudre des problèmes. Le fait d'*interpréter* les mathématiques consiste à réfléchir à des résultats ou des solutions mathématiques et à les interpréter dans le contexte d'un problème ou d'un défi, c'est-à-dire à évaluer des solutions mathématiques ou à raisonner de façon mathématique dans le contexte d'un problème, et à déterminer si les résultats sont plausibles et conviennent à la situation.

Cette définition de la culture mathématique retenue en vue du cycle PISA 2012 vise également à intégrer la notion de modélisation mathématique, qui est depuis toujours une pierre angulaire du cadre d'évaluation de la culture mathématqiue de l'enquête PISA (OCDE, 2003). Les individus enchaînent les étapes à mesure qu'ils utilisent les mathématiques et les outils mathématiques pour résoudre des problèmes contextualisés. La figure 1.1 donne un aperçu des *constructs* majeurs de ce cadre et indique les relations entre chacun d'entre eux.

- Le cadre extérieur de la figure 1.1 montre que la culture mathématique s'exprime dans le contexte d'un défi ou d'un problème qui se pose dans le monde réel. Dans ce cadre, ces défis ou problèmes se caractérisent en fonction de deux dimensions. La première dimension est le contexte – dont les catégories sont décrites ci-après – qui identifie le domaine de la vie dans lequel le problème se produit. Le contexte peut être *personnel*, auquel cas les problèmes ou défis sont ceux qu'un individu peut rencontrer dans sa vie personnelle ou familiale, ou ses relations avec des proches. Les problèmes peuvent aussi s'inscrire dans un contexte *sociétal* (la communauté locale, nationale ou mondiale), *professionnel* (en rapport avec le monde du travail) ou *scientifique* (en rapport avec l'application des mathématiques au monde naturel ou technologique). La seconde dimension qui caractérise les problèmes ou les défis est la nature du phénomène mathématique qui les sous-tend. Les quatre catégories de contenus mathématiques identifient de grands groupes de phénomènes pour l'analyse desquels les mathématiques ont été créées. Ces catégories de contenus mathématiques (*Quantité*, *Incertitude et données*, *Variations et relations* et enfin, *Espace et formes*) sont également identifiées dans le cadre extérieur de la figure 1.1.
- Pour résoudre des problèmes contextualisés, les individus doivent se livrer à des raisonnements et des actions mathématiques, que le présent cadre caractérise en fonction de trois dimensions. En premier lieu, la figure 1.1 reconnaît que les individus doivent se baser sur divers concepts, savoirs et savoir-faire mathématiques. Ces connaissances en mathématiques interviennent lorsque les individus représentent la situation et la formulent de façon mathématique, élaborent des stratégies, formulent des raisons et des arguments, et ainsi de suite. Le cadre conceptuel caractérise ces actes mathématiques en fonction des sept facultés mathématiques fondamentales qui sont reprises dans la figure 1.1 et décrites en détail ci-après. Lorsqu'un individu travaille à la résolution d'un problème – ce qui requiert de sa part qu'il le formule, qu'il emploie des concepts ou des procédures mathématiques, ou qu'il interprète une solution mathématique –, il exploite successivement ou simultanément des facultés mathématiques fondamentales, et se base sur des contenus mathématiques appropriés pour créer une solution.
- La représentation graphique du cycle de modélisation mathématique qui figure dans le cadre intérieur de la figure 1.1 est une version idéalisée et simplifiée des étapes qu'enchaîne celui qui résout un problème à l'aide de sa culture mathématique. C'est une série idéalisée d'étapes qui commence par le « problème contextualisé ». L'individu qui s'attelle à la résolution du problème tente d'identifier les aspects mathématiques de la situation et de *formuler* celle-ci de façon mathématique en fonction des concepts et des relations qu'il a repérés, et des hypothèses simplificatrices qu'il a élaborées. Il traduit donc le « problème contextualisé » en un « problème mathématique » qui se prête à un traitement mathématique. Dans la figure 1.1, la flèche vers le bas décrit le travail entrepris lorsque l'individu *emploie* des concepts, procédures, faits et outils mathématiques pour obtenir des « résultats mathématiques ». Cette étape consiste généralement à raisonner, à manipuler, à transformer et à calculer. Lors de l'étape suivante, les « résultats mathématiques » doivent être contextualisés, c'est-à-dire *interprétés* en fonction du problème initial (ce qui aboutit aux « résultats contextualisés »). Pour ce faire, l'individu doit interpréter, appliquer et évaluer les résultats mathématiques, et juger de leur plausibilité dans le contexte du problème qui s'inscrit dans le monde réel. Ces processus qui consistent à *formuler*, à *employer* et à *interpréter* de façon mathématique sont des composantes majeures du cycle de modélisation mathématique et des composantes majeures de la définition de culture mathématique. Ces trois processus reposent sur des facultés mathématiques fondamentales, qui reposent à leur tour sur les connaissances mathématiques détaillées de l'individu à propos de thématiques spécifiques.

Le cycle de modélisation est au cœur de la conception PISA des élèves, en l'occurrence des acteurs de la résolution de problèmes. Toutefois, il est souvent inutile de se livrer à chaque étape du cycle de modélisation, en particulier lors d'une évaluation (Niss *et al.*, 2007). Il est fréquent, en effet, qu'une partie substantielle du cycle de modélisation ait été effectuée par d'autres et que celui qui tente de résoudre le problème n'ait qu'à entreprendre quelques-unes des étapes. Ainsi, dans certains cas, des représentations mathématiques, telles que des graphiques ou des équations, sont fournies et peuvent être manipulées directement pour répondre à des questions ou tirer des conclusions. C'est la raison pour laquelle de nombreux items PISA n'impliquent qu'une partie du cycle de modélisation. Dans la réalité, les individus doivent aussi passer d'un processus à l'autre et revenir en arrière pour corriger des décisions ou des hypothèses. Chaque processus peut être relativement exigeant et plusieurs itérations peuvent se révéler nécessaires au cours du cycle de modélisation.

■ Figure 1.1 ■
Modélisation de la culture mathématique



Un lien explicite vers un éventail de contextes dans les problèmes du cycle PISA 2012

C'est à dessein qu'il est fait référence à un « éventail de contextes » dans la définition de la culture mathématique, en l'occurrence pour établir un lien avec les contextes spécifiques qui sont décrits de façon plus détaillée ci-après, exemples à l'appui. En soi, les contextes spécifiques ne revêtent pas beaucoup d'importance ; en revanche, les catégories de contextes retenus (personnels, professionnels, sociétaux et scientifiques) reflètent une grande diversité de situations en rapport avec les mathématiques. La définition reconnaît également que la culture mathématique aide les individus à comprendre le rôle que les mathématiques jouent dans le monde, ainsi qu'à poser des jugements fondés et à prendre des décisions en toute connaissance de cause, ce que l'on attend de citoyens constructifs, engagés et réfléchis.

Le rôle visible des outils mathématiques, y compris de la technologie, dans le cycle PISA 2012

La définition de la culture mathématique inclut explicitement l'utilisation d'outils mathématiques, notamment des appareils, des équipements numériques, des logiciels et des systèmes de calcul[2]. Parmi ces outils mathématiques, les outils informatiques sont d'usage courant dans le cadre professionnel au XXIe siècle et le seront encore plus à l'avenir. La nature des problèmes et des raisonnements logiques propres au monde du travail s'est développée avec cette évolution – créant du même coup des attentes plus grandes en matière de culture mathématique.

L'épreuve informatisée de mathématiques est une première dans l'enquête PISA ; les pays participants qui le souhaitent peuvent l'administrer lors du cycle PISA 2012. S'agissant de cette épreuve, la référence aux outils mathématiques dans la définition de la culture mathématique est particulièrement pertinente. L'utilisation de calculatrices a été autorisée lors de toutes les épreuves PISA de mathématiques administrées à ce jour dans les pays où cela était conforme aux principes en vigueur. Par le passé, les items PISA de mathématiques étaient autant que possible conçus pour ne pas être sensibles à l'usage ou non d'une calculatrice. Dans certains items de mathématiques soumis aux élèves dans l'épreuve papier-crayon du cycle PISA 2012, l'usage d'une calculatrice peut apporter un plus ; et dans l'épreuve informatisée de mathématiques, des outils mathématiques tels qu'une calculatrice en ligne sont fournis dans le cadre de certains items. Comme les items PISA s'inspirent de problèmes qui surviennent dans des contextes personnels, professionnels, sociétaux et scientifiques où il est d'usage d'utiliser une calculatrice, une calculatrice peut être utile pour répondre à certains items. L'épreuve informatisée de mathématiques offre l'occasion de fournir un éventail plus large d'outils mathématiques – par exemple, des logiciels d'analyse statistique, de construction géométrique, de visualisation, de mesure, etc. – dans les items. Cela reflète le média que de plus en plus d'individus utilisent lorsqu'ils sont interaction avec le monde qui les entoure et qu'ils résolvent des problèmes. C'est également l'occasion d'évaluer certains aspects de la culture mathématique qu'il est difficile d'appréhender lors d'une épreuve papier-crayon classique.

ORGANISATION DU DOMAINE D'ÉVALUATION

Le cadre PISA de mathématiques définit le domaine des mathématiques tel que l'enquête PISA l'évalue et décrit l'approche adoptée pour mesurer la culture mathématique des adolescents de 15 ans. En fait, l'enquête PISA cherche à déterminer dans quelle mesure les élèves âgés de 15 ans sont capables d'utiliser les mathématiques dans les situations et problèmes (dont la plupart s'inscrivent dans des contextes s'inspirant du monde réel) qui se présentent à eux.

La définition de la culture mathématique retenue à l'occasion du cycle PISA 2012 englobe trois aspects interdépendants :

- les *processus* mathématiques, qui décrivent ce que font des individus pour établir un lien entre le contexte du problème et les mathématiques et, donc, pour résoudre le problème, ainsi que les facultés qui sous-tendent ces processus ;
- les *contenus* mathématiques, qui doivent être utilisés pour répondre aux items ; et
- les *contextes* dans lesquels les items s'inscrivent.

Les sections suivantes développent ces aspects. Le cadre d'évaluation de la culture mathématique du cycle PISA 2012 met ces aspects en évidence de manière à ce que les items mis au point reflètent un éventail varié de processus, de contenus et de contextes, et qu'ensemble, ils traduisent concrètement et fidèlement la culture mathématique telle qu'elle est définie ici. Plusieurs questions dérivées de la définition de la culture mathématique retenue à l'occasion du cycle PISA 2012 sont à la base de cette section :

- Quels sont les processus dans lesquels les individus s'engagent lorsqu'ils résolvent des problèmes de mathématiques en contexte ? Quelles facultés attendons-nous qu'ils exploitent à mesure qu'ils enrichissent leur culture mathématique ?
- Quels contenus mathématiques attendons-nous que les individus – en particulier les élèves âgés de 15 ans – maîtrisent ?
- Dans quels contextes la culture mathématique peut-elle s'observer et s'évaluer ?

Les processus mathématiques et les facultés mathématiques qui les sous-tendent

Les processus mathématiques

Par définition, la culture mathématique renvoie à la capacité des individus de *formuler*, d'*employer* et d'*interpréter* les mathématiques. Ces trois verbes, « formuler », « employer » et « interpréter », constituent à eux seuls une structure signifiante qui permet de définir les processus mathématiques qui décrivent ce que les individus font pour établir un lien entre le contexte d'un problème et les mathématiques et, donc, pour résoudre le problème. Les épreuves de mathématiques du cycle PISA 2012 permettront pour la première fois de rendre compte des résultats des élèves en fonction de ces processus mathématiques, une structure qui fournira des catégories utiles et pertinentes pour l'action publique. Ces catégories qui seront utilisées pour rendre compte des résultats sont les suivantes :

- *formuler* des situations de façon mathématique ;
- *employer* des concepts, faits, procédures et raisonnements mathématiques ; et
- *interpréter,* appliquer et évaluer des résultats mathématiques.

Il est important, tant pour les décideurs que pour les professionnels impliqués plus directement dans l'instruction des élèves, de savoir dans quelle mesure les adolescents sont capables de s'engager dans ces processus. Les résultats de l'enquête PISA concernant le processus de formulation montreront dans quelle mesure les élèves sont capables d'identifier et de reconnaître des possibilités d'utiliser les mathématiques dans le contexte d'un problème, puis de proposer la structure mathématique requise pour formuler le problème contextualisé sous la forme d'un problème mathématique. Les résultats de l'enquête PISA concernant le processus d'emploi des mathématiques montreront dans quelle mesure les élèves sont capables d'effectuer des calculs et des manipulations, et d'appliquer les concepts et les faits qu'ils connaissent pour proposer une solution mathématique à un problème formulé de façon mathématique. Les résultats de l'enquête PISA concernant le processus d'interprétation montreront dans quelle mesure les élèves sont capables de réfléchir à des conclusions ou des solutions mathématiques, de les interpréter dans le contexte d'un problème qui s'inspire du monde réel et de déterminer si les conclusions ou les résultats sont plausibles. La facilité avec laquelle les élèves appliquent les mathématiques dans des problèmes ou des situations dépend de compétences inhérentes à ces trois processus. Évaluer leur aisance par processus peut éclairer les décideurs, alimenter leurs débats et les aider à prendre des décisions plus en prise avec ce qui se passe en classe.

Formuler des situations de façon mathématique

Dans la définition de la culture mathématique, le verbe « formuler » renvoie à la capacité des individus d'identifier et de reconnaître des possibilités d'utiliser les mathématiques dans le contexte d'un problème, puis de structurer sous forme

mathématique un problème présenté jusqu'à un certain point sous une forme contextualisée. Lors de ce processus de *formulation mathématique*, les individus déterminent les mathématiques essentielles à utiliser pour analyser, configurer et résoudre le problème. Ils transposent dans le domaine des mathématiques un problème qui s'inscrit dans un contexte tiré du monde réel, et lui donnent une structure, une représentation et une spécificité d'ordre mathématique. Ils réfléchissent aux contraintes et aux hypothèses, en découvrent le sens et raisonnent à leur sujet. Plus précisément, le processus qui consiste à *formuler des situations de façon mathématique* englobe des activités telles que celles énumérées ci-dessous :

- identifier les aspects mathématiques et les variables significatives d'un problème se situant dans un contexte tiré du monde réel ;
- reconnaître des structures mathématiques (des régularités, des relations, des récurrences, etc.) dans des problèmes ou des situations ;
- simplifier une situation ou un problème pour qu'il se prête à une analyse mathématique ;
- identifier les contraintes et les hypothèses qui sous-tendent toute modélisation mathématique et les simplifications extraites du contexte ;
- représenter la situation de façon mathématique à l'aide de variables, de symboles, de diagrammes et de modèles appropriés ;
- représenter le problème d'une autre façon, notamment l'organiser en fonction de concepts mathématiques et élaborer les hypothèses appropriées ;
- comprendre et expliquer les relations entre le langage spécifique au contexte employé pour décrire le problème et le langage symbolique et formel indispensable pour le représenter sous une forme mathématique ;
- traduire le problème en langage ou en représentation mathématique ;
- reconnaître les aspects du problème qui correspondent à des problèmes connus ou à des concepts, faits et procédures mathématiques ; et
- utiliser la technologie (un tableur ou les fonctions d'une calculatrice graphique) pour décrire une relation mathématique inhérente, dans un problème contextualisé.

L'item *PIZZAS* (voir la section « Exemples d'items PISA » en fin de chapitre) fait largement appel aux compétences des élèves en matière de formulation mathématique. Pour répondre à cet item, les élèves doivent aussi effectuer des calculs et interpréter les résultats de leurs calculs pour déterminer quelle pizza est meilleur marché, mais tout l'enjeu cognitif de l'item réside dans leur capacité à formuler un modèle mathématique qui décrit la notion de rapport quantité-prix. Les élèves doivent donc comprendre qu'étant donné que les pizzas sont de la même épaisseur, mais d'un diamètre différent, ils doivent concentrer leur analyse sur la surface circulaire des pizzas. La relation entre la quantité de pizza et la somme d'argent peut alors être intégrée dans la notion du rapport quantité-prix, qui est modélisée en fonction d'un coût par unité de surface. L'item *CONCERT ROCK* (voir la section « Exemples d'items PISA » en fin de chapitre) illustre lui aussi les items dont la résolution dépend essentiellement de la capacité des élèves à formuler une situation de façon mathématique (en l'espèce, la superficie et la forme du terrain, le fait que le concert est complet et que les fans sont debout) et à traduire ces informations sous une forme mathématique sensée pour estimer le nombre de personnes qui assistent au concert.

Employer des concepts, faits, procédures et raisonnements mathématiques

Dans la définition de la culture mathématique, le verbe « employer » renvoie à la capacité des individus d'appliquer des concepts, faits, procédures et raisonnements mathématiques pour résoudre des problèmes énoncés de façon mathématique afin d'aboutir à des conclusions mathématiques. Au cours de ce processus qui consiste à *employer des concepts, faits, procédures et raisonnements mathématiques*, les individus appliquent les procédures mathématiques requises pour dériver des résultats et trouver une solution mathématique (effectuer des opérations arithmétiques, résoudre des équations, faire des déductions logiques à partir d'hypothèses mathématiques, faire des manipulations symboliques, extraire des informations de tableaux et graphiques, représenter et manipuler des formes dans l'espace, et analyser des données). Ils travaillent sur un modèle de la situation du problème, identifient des récurrences et des relations entre des entités mathématiques, et formulent des arguments mathématiques. Ce processus qui consiste à *employer des concepts, faits, procédures et raisonnements mathématiques* englobe des activités telles que celles énumérées ci-dessous :

- concevoir et appliquer des stratégies en vue de trouver des solutions mathématiques ;
- utiliser des outils mathématiques, dont des applications technologiques, pour faciliter la recherche d'une solution précise ou approximative ;

- appliquer des faits, des lois, des algorithmes et des structures mathématiques à la recherche de la solution ;
- manipuler des nombres, des informations et des données graphiques et statistiques, des équations et des expressions algébriques, ainsi que des représentations géométriques ;
- élaborer des structures, des diagrammes et des graphiques mathématiques, et en extraire des informations mathématiques ;
- utiliser différentes représentations et passer de l'une à l'autre durant le processus de résolution du problème ;
- faire des généralisations à partir des résultats de l'application de procédures mathématiques pour trouver des solutions ; et
- réfléchir à des arguments mathématiques, et expliquer et justifier des résultats mathématiques.

Parmi les unités PISA rendues publiques, l'unité *MARCHE À PIED* (voir la section « Exemples d'items PISA » en fin de chapitre) comporte des items qui demandent essentiellement aux élèves d'*employer des concepts, faits, procédures et raisonnements mathématiques*. Les deux items de cette unité dépendent de l'utilisation d'un modèle donné, en l'espèce une formule, pour déterminer la longueur de pas (dans le premier item) et la vitesse de marche (dans le deuxième item). Les deux questions sont formulées en des termes qui se présentent déjà sous une structure mathématique, et les élèves doivent faire des manipulations et des opérations algébriques pour trouver la solution. Parmi les unités PISA publiées, l'unité *MENUISIER* (voir la section « Exemples d'items PISA » en fin de chapitre) demande essentiellement aussi aux élèves d'*employer des concepts, faits, procédures et raisonnements mathématiques*. La plus grande difficulté cognitive est de concevoir une stratégie pour trouver des informations au sujet de la longueur totale d'un tracé composé de segments dont la longueur est inconnue, puis de se livrer à un raisonnement pour comparer les longueurs. Les élèves doivent aussi établir un lien entre les diagrammes, le jardin et les périmètres, d'une part, et la longueur des planches disponibles, d'autre part, mais ce processus de formulation est nettement moins difficile que le raisonnement à propos de la longueur des périmètres.

Interpréter, appliquer et évaluer des résultats mathématiques

Dans la définition de la culture mathématique, le verbe « interpréter » renvoie à la capacité des individus de réfléchir à des solutions, des résultats ou des conclusions mathématiques, et de les interpréter dans le cadre de problèmes tirés du monde réel. Ce processus consiste à traduire des solutions mathématiques ou à replacer le raisonnement dans le contexte du problème, et à déterminer si les résultats sont plausibles et sont appropriés dans le contexte du problème. Ce processus mathématique est représenté par les flèches « Interpréter » et « Évaluer » dans le modèle de culture mathématique décrit à la figure 1.1. Les individus qui s'engagent dans ce processus peuvent être amenés à formuler et communiquer des explications et des arguments dans le contexte du problème, en réfléchissant au processus de modélisation et à ses résultats. Ce processus qui consiste à *interpréter, appliquer et évaluer des résultats mathématiques* englobe des activités telles que celles énumérées ci-dessous :

- interpréter un résultat mathématique en fonction de la situation initiale du problème ;
- évaluer la plausibilité d'une solution mathématique dans le contexte d'un problème qui s'inspire du monde réel ;
- comprendre en quoi le monde réel a un impact sur les résultats et les calculs d'un modèle ou d'une procédure mathématique pour poser des jugements en contexte sur la façon d'appliquer ou d'ajuster les résultats ;
- expliquer pourquoi une conclusion ou un résultat mathématique est ou n'est pas plausible dans le contexte d'un problème ;
- comprendre la portée et les limites de concepts et de résultats mathématiques ; et
- critiquer le modèle utilisé pour résoudre le problème et en identifier les limites.

Parmi les items PISA rendus public, l'item *DÉCHETS* (voir la section « Exemples d'items PISA » en fin de chapitre) demande essentiellement aux élèves d'exploiter leur capacité d'*interpréter, appliquer et évaluer des résultats mathématiques*, en l'occurrence de déterminer si un résultat mathématique – en l'espèce un diagramme en bâtons qu'ils ont dessiné ou imaginé – est pertinent pour décrire les données présentées au sujet du temps de décomposition de plusieurs types de déchets. Les élèves doivent se livrer à un raisonnement à propos des données fournies et à une réflexion mathématique à propos de la relation entre les données et la façon dont elles sont présentées, puis évaluer les résultats. Ils doivent expliquer pourquoi un diagramme en bâtons n'est pas approprié pour présenter les données fournies.

Facultés mathématiques fondamentales sous-tendant les processus mathématiques

Les dix années passées à concevoir des items PISA et à analyser la façon dont les élèves y répondent ont révélé l'existence d'une série de facultés mathématiques fondamentales qui sous-tendent concrètement chacun des processus

mathématiques retenus et la culture mathématique. Dans le cadre de leurs travaux, Mogens Niss et ses collègues danois (Niss, 2003 ; Niss et Jensen, 2002 ; Niss et Højgaard, 2011) ont identifié huit facultés – appelées « compétences » par Niss et également désignées de cette manière dans le cadre d'évaluation de la culture mathématique du cycle PISA 2003 (OCDE, 2003) – qui jouent un rôle primordial dans le comportement mathématique. Le cadre du cycle PISA 2012 reprend cette série de facultés, mais les condense pour les limiter à sept sur la base des recherches menées par le MEG sur leur utilisation lors de la résolution d'items déjà administrés (Turner *et al.*, à paraître). Il est communément admis qu'il est indispensable d'identifier une série de facultés mathématiques générales en complément du rôle des contenus mathématiques spécifiques dans l'apprentissage des mathématiques. Citons, entre autres exemples connus, les huit pratiques mathématiques que prévoient les *Common Core State Standards* aux États-Unis (2010), les quatre processus mathématiques fondamentaux (représenter, analyser, interpréter et évaluer, et enfin, communiquer et réfléchir) du programme national de mathématiques en Angleterre (*Qualifications and Curriculum Authority*, 2007) et les processus de base retenus par le *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) (*Principles and Standards for School Mathematics*, NCTM, 2000). Ces facultés cognitives peuvent être apprises par les individus pour comprendre le monde et s'y impliquer d'une façon mathématique ou résoudre des problèmes. À mesure que le degré de culture mathématique des individus augmente, ils peuvent faire appel de manière plus poussée à des facultés mathématiques fondamentales (Turner et Adams, 2012). L'activation croissante des facultés mathématiques fondamentales est donc associée à la difficulté croissante des items. Cette observation est à la base de la description des différents niveaux de compétence en culture mathématique retenus lors des cycles précédents de l'enquête PISA. Nous y reviendrons ultérieurement, dans l'encadré 1.1.

Les sept facultés mathématiques fondamentales retenues dans ce cadre d'évaluation sont les suivantes :

- *Communication* : la culture mathématique inclut la *communication.* Les individus perçoivent l'existence d'un défi, ce qui les stimule pour reconnaître et comprendre un problème contextualisé. Lire, décoder et interpréter des énoncés, des questions, des tâches ou des données permet aux individus de se construire un modèle mental de la situation, ce qui constitue une étape importante sur la voie de la compréhension, de la clarification et de la formulation d'un problème. Lors du processus de résolution, les individus peuvent avoir à résumer et présenter des résultats intermédiaires. Ensuite, lorsqu'ils ont trouvé une solution, ils peuvent avoir à présenter cette solution à d'autres, voire à l'expliquer ou à la justifier.
- *Mathématisation* : les individus sont souvent amenés à transposer un problème défini en fonction du monde réel sous une forme strictement mathématique (en faisant appel à des processus de structuration, de conceptualisation, d'élaboration d'hypothèses et/ou de formulation de modèle), et à interpréter ou évaluer un résultat ou un modèle mathématique en fonction du problème initial. Le terme de « mathématisation » est employé pour décrire les activités fondamentales de ce type.
- *Représentation* : les individus sont très souvent amenés à se *représenter* des situations ou objets mathématiques, ce qui peut consister à sélectionner, interpréter et utiliser diverses représentations pour se faire une idée du problème, à passer d'une représentation à l'autre, à entrer en interaction avec le problème ou à présenter leur travail. Par représentations, on entend des graphiques, des tableaux, des diagrammes, des images, des équations, des formules et des matériaux concrets.
- *Raisonnement et argumentation* : les facultés de *raisonnement* et d'*argumentation* interviennent au cours des différentes étapes et activités associées à la culture mathématique. Cette compétence implique des processus logiques approfondis et permet d'explorer et de relier des éléments du problème pour en dégager des inférences, vérifier une justification fournie ou justifier une affirmation ou une solution.
- *Conception de stratégies de résolution de problèmes* : les individus sont souvent amenés à *concevoir des stratégies* pour résoudre des problèmes de façon mathématique. Cela passe par une série de processus de contrôles critiques, qui guident les individus pour les aider à reconnaître, formuler et résoudre des problèmes. Cette compétence permet aux individus de sélectionner ou de concevoir une approche ou une stratégie permettant d'utiliser les mathématiques pour résoudre les problèmes qui se posent dans une tâche ou dans un contexte, mais aussi de guider sa mise en œuvre. Cette compétence mathématique peut intervenir à n'importe quel stade du processus de résolution de problèmes.
- *Utilisation d'opérations et d'un langage symbolique, formel et technique* : les individus qui exploitent leur culture mathématique doivent *utiliser des opérations et un langage symbolique, formel et technique*, ce qui consiste à comprendre, interpréter, manipuler et employer des expressions symboliques (y compris des opérations et des expressions arithmétiques) dans un contexte mathématique régi par des conventions et des règles mathématiques. Cela implique aussi de comprendre et d'utiliser des *constructs* formels basés sur des définitions, des règles et des systèmes formels, et d'employer des algorithmes avec ces entités. Les symboles, les règles et les systèmes utilisés varient en fonction des contenus mathématiques spécifiques requis dans une tâche pour formuler ou résoudre le problème, ou en interpréter les aspects mathématiques.

- *Utilisation d'outils mathématiques* : la dernière compétence mathématique qui sous-tend concrètement la culture mathématique est la capacité d'*utiliser des outils mathématiques*. Par outils mathématiques, on entend les appareils tels que les instruments de mesure, ainsi que les calculatrices et les outils informatiques qui se généralisent. Les individus qui possèdent cette compétence connaissent divers outils susceptibles de les aider durant une activité mathématique, sont capables de les utiliser et sont conscients de leurs limites. Les outils mathématiques peuvent jouer un rôle important lors de la communication des résultats. Lors des cycles précédents, il n'a été possible de les inclure que de manière minimale, en raison de l'administration d'épreuves papier-crayon. L'épreuve informatisée de mathématiques, une composante facultative du cycle PISA 2012, offre davantage de possibilités pour faire en sorte que les élèves se servent des outils mathématiques, ce qui permettra d'observer la façon dont ils les utilisent durant l'épreuve.

Ces facultés interviennent à des degrés divers dans chacun des processus utilisés pour rendre compte des résultats. La façon dont ces facultés se manifestent dans les trois processus est décrite dans la figure 1.2. L'encadré 1.1 « Les facultés mathématiques fondamentales et leur relation avec la difficulté des items », en fin de chapitre, explique ces facultés de façon plus détaillée et revient en particulier sur leur lien avec la difficulté des items. De plus, les exemples proposés dans la section « Exemples d'items PISA » décrivent la façon dont les élèves peuvent utiliser ces facultés lorsqu'ils résolvent un problème spécifique.

Contenus mathématiques

Acquérir des connaissances en mathématiques – et savoir les appliquer pour résoudre des problèmes qui se posent dans le monde réel – est important pour les citoyens dans les sociétés modernes. Il faut en effet pouvoir s'appuyer sur des connaissances mathématiques et sur une certaine compréhension des mathématiques pour résoudre des problèmes et interpréter des situations en rapport avec la vie personnelle et professionnelle, la société et la science.

Les structures mathématiques ont été développées au fil du temps pour comprendre et interpréter des phénomènes naturels et sociaux. À l'école, les programmes de mathématiques sont organisés autour d'un découpage logique des matières (l'arithmétique, l'algèbre, la géométrie, etc.), qui reflète les diverses branches, historiquement bien établies, des mathématiques et contribue à la définition d'une progression structurée. Or, en dehors des cours de mathématiques, les problèmes qui se posent ne s'accompagnent pas d'une série de règles et de principes qui montrent comment les surmonter. Il faut généralement une certaine créativité pour déterminer comment utiliser les mathématiques pour les résoudre et les formuler de façon mathématique. Il est fréquent que la même situation puisse s'aborder avec des concepts, procédures, faits ou outils mathématiques différents.

Comme l'enquête PISA a pour objet d'évaluer la culture mathématique, une structure des connaissances mathématiques est proposée sur la base des phénomènes mathématiques qui sous-tendent un large éventail de problèmes et qui ont motivé l'élaboration de concepts et procédures mathématiques spécifiques. Ainsi, des phénomènes mathématiques tels que l'incertitude et la variation sous-tendent de nombreuses situations courantes, et des stratégies et des outils mathématiques ont été conçus pour analyser ce type de situations. Cette organisation des connaissances mathématiques n'est pas neuve, comme le montrent deux ouvrages célèbres : *On the Shoulders of Giants: New Approaches to Numeracy* (Steen, 1990) et *Mathematics: The Science of Patterns* (Devlin, 1994).

Comme les programmes nationaux de cours de mathématiques sont conçus pour inculquer aux élèves des connaissances et des compétences en rapport avec ces mêmes phénomènes mathématiques, les contenus mathématiques qui ressortent de l'organisation du domaine d'évaluation sont très proches de la structure des programmes de cours. Pour orienter les développeurs d'items, le présent cadre identifie aussi quelques thématiques appropriées pour évaluer la culture mathématique des élèves âgés de 15 ans, sur la base de l'analyse des normes en vigueur en la matière dans 11 pays[3].

Pour organiser le domaine des mathématiques en vue d'évaluer la culture mathématique, il est important de choisir une structure conforme à l'évolution historique des mathématiques, qui soit suffisamment variée et approfondie pour révéler l'essence des mathématiques et qui, de surcroît, représente – ou inclue – les branches conventionnelles des mathématiques d'une manière acceptable. Historiquement, les mathématiques se sont muées en l'étude intégrée des nombres, des formes, des variations et des relations avec l'invention, au XVIIe siècle, du calcul et de la géométrie analytique ; l'analyse de phénomènes tels que l'aléatoire et l'incertitude est devenue déterminante pour la résolution de problèmes au XIXe et au XXe siècle. C'est dans cet esprit que des *catégories de contenus* qui reflètent des phénomènes mathématiques ont été retenues dans le cadre d'évaluation du cycle PISA 2012. Ces catégories sont cohérentes avec celles utilisées lors des cycles PISA précédents.

■ Figure 1.2 ■

Relation entre les processus mathématiques et les facultés mathématiques fondamentales

	Formuler **des situations de façon mathématique**	***Employer*** **des concepts, faits, procédures et raisonnements mathématiques**	***Interpréter,*** **appliquer et évaluer des résultats mathématiques**
Communication	Lire, décoder et comprendre des questions, des tâches, des objets, des images ou des animations (dans l'épreuve informatisée) pour élaborer un modèle mental de la situation	Articuler une solution, expliquer le cheminement vers la solution, et/ou résumer et présenter des résultats mathématiques intermédiaires	Construire et communiquer des explications et des arguments au sujet du problème contextualisé
Mathématisation	Identifier les structures et les variables mathématiques dans le problème tel qu'il se pose dans le monde réel, et formuler des hypothèses pour pouvoir les utiliser	Se baser sur la compréhension du contexte pour orienter ou effectuer le processus de résolution mathématique, par exemple, travailler avec un degré de précision approprié au contexte	Comprendre la portée et les limites d'une solution mathématique qui découlent du modèle mathématique employé
Représentation	Créer une représentation mathématique des données du problème tel qu'il se pose dans le monde réel	Comprendre, relier et utiliser une série de représentations lors de l'interaction avec le problème	Interpréter des résultats mathématiques dans une série de formats en rapport avec une situation ou une utilisation ; comparer ou évaluer plusieurs représentations en fonction d'une situation
Raisonnement et argumentation	Expliquer, défendre ou justifier la représentation identifiée ou conçue de la situation du problème tel qu'il se pose dans le monde réel	Expliquer, défendre ou justifier les procédures ou processus utilisés pour chercher une solution ou un résultat mathématique Établir un lien entre des fragments d'information pour parvenir à une solution mathématique, faire des généralisations ou créer une argumentation en plusieurs étapes	Réfléchir aux solutions mathématiques et fournir des explications et des arguments pour étayer, réfuter ou confirmer une solution mathématique à un problème tel qu'il se pose dans le monde réel
Conception de stratégies de résolution de problèmes	Choisir ou concevoir une approche ou une stratégie pour situer des problèmes contextualisés dans un cadre mathématique	Actionner des mécanismes efficaces de contrôle pendant une procédure en plusieurs étapes qui doit mener à une généralisation, une conclusion ou une solution mathématique	Concevoir et appliquer une stratégie pour interpréter, évaluer et valider une solution mathématique à un problème qui se pose dans le monde réel
Utilisation d'opérations et d'un langage symbolique, formel et technique	Utiliser des modèles standard, des diagrammes, des symboles et des variables *ad hoc* pour énoncer dans un langage symbolique ou formel un problème qui se pose dans le monde réel	Comprendre et utiliser des *constructs* formels sur la base de définitions, de règles et de systèmes formels ; utiliser des algorithmes	Utiliser des outils mathématiques pour établir la plausibilité d'une solution mathématique et identifier d'éventuelles limites ou contraintes à propos de la solution, compte tenu du problème tel qu'il se présente dans le monde réel
Utilisation d'outils mathématiques	Utiliser des outils mathématiques pour identifier des structures mathématiques ou décrire des relations mathématiques	Connaître et savoir utiliser comme il se doit divers outils, pour faciliter la mise en œuvre de processus et de procédures à la recherche de solutions	Utiliser des outils mathématiques pour établir la plausibilité d'une solution mathématique et identifier d'éventuelles limites ou contraintes à propos de la solution, compte tenu du problème tel qu'il se présente dans le monde réel

Les catégories de contenus suivantes ont été retenues en vue du cycle PISA 2012 dans le respect de l'évolution historique des mathématiques pour bien refléter le domaine des mathématiques et les phénomènes sous-jacents qui ont motivé leur développement ainsi que les grandes branches des programmes de cours. Ces quatre catégories caractérisent les contenus mathématiques au cœur de la discipline et illustrent les contenus qui ont présidé au développement des items du cycle PISA 2012 :

- *les variations et les relations* ;
- *l'espace et les formes* ;
- *la quantité* ; et
- *l'incertitude et les données*[4].

Ces quatre catégories permettent d'organiser le domaine d'évaluation de sorte que les items se répartissent bien dans l'ensemble du domaine et se concentrent sur des phénomènes mathématiques importants, tout en évitant une division trop fine qui irait à l'encontre de la volonté de proposer des problèmes mathématiques riches et passionnants qui s'inspirent du monde réel. Cette classification par contenu est importante pour concevoir et choisir les items ainsi que pour rendre compte des résultats, mais il faut souligner ici que certains contenus spécifiques peuvent se retrouver dans plus d'une catégorie. L'un des items de l'unité PISA *PIZZAS* implique, par exemple, de déterminer laquelle parmi deux pizzas rondes de même diamètre, mais d'épaisseur différente, est la meilleure marché (cet item et ses attributs sont décrits dans la section « Exemples d'items PISA » en fin de chapitre). Cet item intègre diverses branches des mathématiques, dont la mesure, la quantification (valeurs, proportions et opérations arithmétiques) et, enfin, les variations et les relations (relations entre les variables et variations des propriétés de la petite et de la grande pizza). Cet item a finalement été classé dans la catégorie de contenu *Variations et relations* car pour le résoudre, les élèves doivent essentiellement être capables d'établir une correspondance entre la variation de la taille de deux pizzas (la variation de diamètre) et la variation du prix. Un autre item en rapport avec un cercle aurait de toute évidence pu être classé dans la catégorie de contenu *Espace et formes*. Les liens entre des aspects qui s'étendent sur les quatre catégories contribuent à la cohérence des mathématiques en tant que discipline et sont visibles dans certains items retenus pour constituer les épreuves de mathématiques du cycle PISA 2012.

Les catégories de contenus et les concepts spécifiquement adaptés aux élèves âgés de 15 ans décrits ci-après permettent de cerner le niveau et la portée des contenus susceptibles d'être inclus dans l'enquête PISA. En premier lieu, les catégories de contenus sont décrites de façon globale et leur pertinence pour résoudre des problèmes est expliquée. En second lieu, les types de contenus qu'il est approprié d'inclure dans une évaluation de la culture mathématique des élèves âgés de 15 ans sont décrits de manière plus spécifique. Ces thématiques spécifiques reflètent des aspects communs qui se retrouvent dans les attentes d'un certain nombre de pays et de systèmes d'éducation. Les normes examinées pour identifier ces thématiques sont considérées non seulement comme des éléments qui montrent ce qui est enseigné en mathématiques dans ces pays, mais également comme des indicateurs des connaissances et compétences que ces pays jugent important d'inculquer aux élèves de cet âge pour les préparer à devenir des citoyens constructifs, engagés et réfléchis.

Les catégories de contenus mathématiques – *variations et relations*, ; *espace et formes* ; *quantité ;* et *incertitude et données* – sont décrites ci-dessous.

Variations et relations

Le monde naturel et le monde façonné par l'homme affichent une multitude de relations provisoires et permanentes entre les objets et les circonstances, dans lesquelles des changements interviennent dans des systèmes d'objets interdépendants ou dans des circonstances où les éléments s'influencent les uns les autres. Dans de nombreux cas, ces changements se produisent avec le temps. Il arrive aussi que des changements qui affectent un objet ou une quantité soient en rapport avec des changements qui ont eu lieu sur un autre objet ou quantité. Il s'agit de changements tantôt ponctuels, tantôt continus. Certaines relations sont de nature permanente. Pour mieux comprendre les variations et les relations, il faut tout d'abord comprendre les types fondamentaux de changement et les reconnaître lorsqu'ils se produisent. C'est essentiel pour utiliser des modèles mathématiques adaptés qui permettent de décrire et prévoir les changements. En termes mathématiques, cela revient à modéliser les variations et les relations grâce à des fonctions et équations appropriées, ainsi qu'à créer, interpréter et traduire des représentations graphiques et symboliques des relations.

Les *variations* et les *relations* s'observent dans des contextes très divers : la croissance des organismes, la musique, le cycle des saisons, les tendances météorologiques, le taux d'emploi et la conjoncture économique, par exemple. Certains aspects mathématiques traditionnels des fonctions et de l'algèbre, notamment les expressions algébriques, les équations et les inégalités ou les représentations sous forme de graphiques et de tableaux, sont essentiels pour décrire, modéliser et interpréter les phénomènes de variation. Parmi les unités PISA qui ont été publiées, l'unité *MARCHE À PIED* (voir la section « Exemples d'items PISA » en fin de chapitre) contient, par exemple, deux items typiques de la catégorie *Variations et relations*, car ils portent sur des relations algébriques entre deux variables et demandent aux élèves d'exploiter leurs connaissances et leurs compétences en algèbre. Les élèves doivent utiliser une formule donnée – sous forme algébrique – pour calculer la longueur de pas dans le premier item et la vitesse de marche dans le second item. Les représentations statistiques de données et de relations sont souvent utilisées pour décrire et interpréter des *variations* et des *relations*. Une bonne maîtrise des nombres et des unités est également essentielle pour définir et interpréter des *variations* et des *relations*. Quelques relations intéressantes se dégagent du mesurage géométrique, par exemple le fait que des changements de périmètre dans une famille de formes peuvent se traduire par des changements de superficie, ou encore les relations entre les longueurs des côtés de triangles. Parmi les unités PISA qui ont été publiées, l'unité *PIZZAS* (voir la section « Exemples d'items PISA » en fin de chapitre) illustre la catégorie *Variations et relations*.

L'épreuve informatisée de mathématiques, une option du cycle PISA 2012, permet de soumettre aux élèves des images dynamiques et plusieurs représentations en lien dynamique, et leur donne la possibilité de manipuler des fonctions. Ainsi, l'évolution dans le temps (la croissance ou le mouvement, par exemple) peut être décrite directement par des animations et des simulations, et représentée par des fonctions, des graphiques et des tableaux de données liés entre eux. Le processus qui consiste à trouver, puis utiliser des modèles mathématiques de changement est plus étendu, car les individus peuvent explorer et décrire le changement à l'aide de logiciels qui permettent de dessiner des fonctions, de manipuler des paramètres, de générer des tableaux de données, d'utiliser des relations géométriques, d'organiser des données, et d'en faire des graphiques et d'effectuer des calculs sur la base de formules. Les fonctionnalités des tableurs, qui permettent de travailler avec des formules et de transposer des données dans des graphiques, sont particulièrement pertinentes.

Espace et formes

La catégorie de contenus *Espace et formes* englobe un large éventail de phénomènes omniprésents dans notre environnement visuel et physique : les régularités, les propriétés des objets, les positions et les orientations, les représentations d'objets, l'encodage et le décodage d'informations visuelles, la navigation et les interactions dynamiques avec des formes réelles ainsi qu'avec leur représentation. La géométrie est un fondement essentiel de la catégorie *Espace et formes*, qui s'étend toutefois au-delà des limites de cette branche en termes de contenu, de signification et de méthode, et intègre d'autres branches des mathématiques, telles que la visualisation dans l'espace, le mesurage et l'algèbre. Ainsi, des formes peuvent se déformer et un point peut se déplacer dans l'espace, ce qui fait intervenir des concepts de fonction. Les formules de mesure sont centrales. La manipulation et l'interprétation de formes contextualisées qui passent par l'utilisation d'outils tels que des logiciels de géométrie dynamique ou de géolocalisation sont incluses dans cette catégorie de contenus.

L'enquête PISA part du principe que la maîtrise d'une série de compétences et de concepts fondamentaux est essentielle pour démontrer sa culture mathématique dans la catégorie *Espace et formes*, ce qui implique un large éventail d'activités, notamment comprendre la notion de perspective (dans des peintures, par exemple), créer et lire des cartes, transformer des formes avec ou sans aide technologique, interpréter des vues de scènes en trois dimensions sous diverses perspectives et construire des représentations de formes. L'item *MENUISIER* (voir la section « Exemples d'items PISA » en fin de chapitre) relève de cette catégorie *Espace et formes*, car il porte sur un autre de ses aspects majeurs, à savoir les propriétés des formes. Dans cet item à choix multiple complexe, les élèves doivent identifier parmi les quatre tracés de bordure de jardin qui leur sont présentés celui ou ceux qu'il est possible de fabriquer avec 32 mètres de planches. Pour y répondre, ils doivent exploiter leurs facultés de raisonnement et leurs connaissances en géométrie. Ils disposent de suffisamment d'informations pour calculer directement le périmètre précis de la bordure dans trois tracés, mais des informations incorrectes leur sont fournies dans un tracé, ce qui les oblige à utiliser leurs facultés de raisonnement en géométrie qualitative.

L'épreuve informatisée de mathématiques permet aux élèves de manipuler des représentations dynamiques de formes et d'explorer des relations entre des objets géométriques en trois dimensions, qu'il est possible de faire pivoter virtuellement pour obtenir une représentation mentale précise. Les élèves peuvent utiliser des cartes dont ils peuvent accroître ou réduire le degré de précision, ou qu'ils peuvent faire pivoter pour se construire une image mentale d'un endroit, puis les employer pour établir un itinéraire, par exemple. Ils peuvent choisir et utiliser des outils pour prendre

des mesures (d'angles, de segments, etc.) sur des plans, des images et des modèles, puis utiliser ces données dans des calculs. La technologie permet aux élèves de mêler leurs connaissances en géométrie à des informations visuelles pour construire un modèle mental précis. Ainsi, pour déterminer le volume d'une tasse, ils peuvent manipuler une image pour déterminer s'il s'agit d'un cône tronqué, en connaître la hauteur perpendiculaire et savoir où la mesurer, et comprendre que ce qui ressemble à des ellipses en bas et en haut de l'image en deux dimensions est en fait un cercle dans l'espace en trois dimensions.

Quantité

La notion de *quantité* est peut-être l'aspect mathématique le plus répandu et le plus essentiel de l'engagement et du fonctionnement dans notre monde. Elle englobe la quantification d'attributs d'objets, de relations, de situations et d'entités dans le monde, la compréhension de diverses représentations de ces quantifications, et l'évaluation d'interprétations et d'arguments fondés sur la quantité. Pour appréhender la quantification, il faut comprendre le mesurage, le comptage, la magnitude, les unités, les indicateurs, la taille relative, les tendances numériques et les régularités. Certains aspects du raisonnement quantitatif – le sens des nombres, les représentations multiples des nombres, l'élégance des calculs, le calcul mental, les estimations et l'évaluation de la plausibilité des résultats – sont l'essence même de la culture mathématique dans la catégorie *Quantité*.

La quantification est la principale méthode qui existe pour décrire et mesurer un grand nombre des attributs d'objets dans le monde. Elle permet de modéliser des situations, d'examiner les variations et les relations, de décrire et de manipuler l'espace et les formes, d'organiser et d'interpréter les données, et de mesurer et d'évaluer l'incertitude. Dans la catégorie *Quantité*, la culture mathématique consiste à utiliser des connaissances relatives aux nombres et aux opérations avec des nombres dans un large éventail de contextes. L'item *CONCERT ROCK* (vois la section « Exemples d'items PISA » en fin de chapitre) est un exemple typique d'items relevant de la catégorie *Quantité*. Dans cet item, les élèves doivent estimer le nombre total de spectateurs qui assistent à un concert en fonction des dimensions du terrain en forme de rectangle où s'organise ce concert. Cet item comporte certains éléments qui le rapprochent de la catégorie *Espace et formes*, mais il demande avant tout aux élèves de formuler une hypothèse sur l'espace qu'il est raisonnable de prévoir par spectateur et d'utiliser la superficie totale disponible pour estimer le nombre de spectateurs qu'il est possible d'accueillir. Comme il s'agit d'un item à choix multiple, les élèves peuvent aussi travailler à rebours sur la base de la superficie et de chaque option de réponse pour calculer l'espace correspondant par personne et, ainsi, déterminer l'option de réponse la plus plausible. Comme les options de réponse sont exprimées en milliers de spectateurs (2 000 ou 5 000 spectateurs, par exemple), cet item fait aussi appel aux facultés d'estimation numérique des élèves.

L'épreuve informatisée de mathématiques permet aux élèves de tirer parti de la grande puissance de calcul des technologies modernes. Il importe de souligner que si les individus peuvent, grâce à la technologie, éviter de faire des calculs et libérer certaines de leurs ressources cognitives pour leur permettre de se concentrer sur le sens et la stratégie lorsqu'ils résolvent des problèmes, ils doivent comprendre les mathématiques de manière approfondie pour démontrer leur culture mathématique. Les individus qui n'ont pas cette compréhension des mathématiques peuvent au mieux utiliser la technologie pour effectuer des tâches routinières, ce qui ne cadre pas avec la définition de la culture mathématique retenue dans le cadre du cycle PISA 2012. De plus, l'intégration de la technologie dans l'épreuve informatisée de mathématiques permet l'inclusion d'items qui font appel à des niveaux de compétence en calcul numérique et statistique qu'il serait impossible de gérer dans une épreuve papier-crayon.

Incertitude et données

L'incertitude est une donnée en sciences, dans la technologie et dans la vie de tous les jours. Le phénomène d'incertitude est donc au cœur de l'analyse mathématique de nombreux problèmes, et la théorie de la probabilité et la statistique ont été créées pour y répondre. Dans la catégorie de contenu *Incertitude et données*, il s'agit de reconnaître la place de la variation dans les processus, de comprendre l'ampleur de cette variation, d'admettre la notion d'incertitude et d'erreur dans le mesurage, et de connaître le concept de chance. Il faut également formuler, interpréter et évaluer des conclusions dans des situations où règne l'incertitude. La présentation et l'interprétation des données sont essentielles dans cette catégorie (Moore, 1997).

L'incertitude entoure les prévisions scientifiques, les résultats de scrutins électoraux, les prévisions météorologiques et les modèles économiques. Les notes à un examen, les résultats de sondages et les processus de fabrication varient, et la chance est fondamentale dans de nombreuses activités récréatives auxquelles les individus se livrent pendant leurs loisirs. Les branches traditionnelles de la probabilité et de la statistique sont des moyens formels de décrire, modéliser

et interpréter une certaine catégorie de phénomènes, et de dégager des inférences. Par ailleurs, la connaissance des nombres et de certains aspects de l'algèbre comme les graphiques et les représentations symboliques facilite la tâche aux individus qui s'attaquent à des problèmes relevant de cette catégorie. L'item *DÉCHETS* (voir la section « Exemples d'items PISA » en fin de chapitre) est classé dans la catégorie *Incertitude et données*. Dans cet item, les élèves doivent examiner des données qui leur sont présentées dans un tableau et expliquer pourquoi un diagramme en bâtons n'est pas approprié pour les communiquer. La présentation et l'interprétation des données constituent un aspect important de la catégorie *Incertitude et données*.

L'épreuve informatisée de mathématiques permet de soumettre aux élèves des volumes plus importants de données et leur offre la puissance de calcul et des fonctions de traitement des données dont ils ont besoin pour les traiter. Ils ont la possibilité de choisir des outils pour manipuler, analyser et représenter des données, et de prélever des échantillons dans des séries de données. Des représentations interdépendantes leur permettent d'examiner et de décrire ces données de différentes façons. La faculté de générer des résultats aléatoires, dont des nombres, leur permet d'explorer des situations en rapport avec les probabilités par le biais de la simulation, par exemple la probabilité empirique d'événements et de propriétés d'échantillons.

Thématiques retenues pour orienter l'évaluation de la culture mathématique des élèves âgés de 15 ans

Pour bien comprendre, puis résoudre des problèmes contextualisés en rapport avec les catégories *Variations et relations*, *Espace et formes, Quantité,* et *Incertitude et données*, il faut pouvoir se baser sur une série de concepts, procédures, faits et outils mathématiques, et ce, avec un certain niveau de maîtrise et de sophistication. L'épreuve PISA de culture mathématique cherche à évaluer des niveaux et des contenus mathématiques appropriés aux élèves âgés de 15 ans pendant leur cheminement vers une citoyenneté constructive, engagée et réfléchie, qui leur permet de poser des jugements et de prendre des décisions en toute connaissance de cause. L'enquête PISA, qui n'est pas conçue pour évaluer des matières précises du programme de cours, tente de refléter les connaissances et compétences que les élèves ont eu la possibilité d'acquérir jusqu'à l'âge de 15 ans.

Nous avons analysé une série de normes prévues en mathématiques dans 11 pays pour déterminer ce qui est enseigné aux élèves dans le monde et ce que les pays jugent réaliste et important de leur inculquer pour les préparer alors qu'ils s'apprêtent à entrer dans le monde du travail ou à suivre des études supérieures, avec en ligne de mire la volonté de concevoir une épreuve qui soit non seulement prospective, mais également révélatrice des mathématiques qui sont enseignées jusqu'à l'âge de 15 ans. Les contenus mathématiques qu'il a été jugé pertinent d'inclure dans une évaluation de la culture mathématique des élèves de 15 ans sur la base des points communs relevés lors de ces analyses et des jugements d'experts en mathématiques sont décrits ci-dessous.

Les quatre catégories de contenu *Variations et relations*, *Espace et formes*, *Quantité*, et *Incertitude et données* ont servi de base à l'identification des différents contenus, même s'il n'y a pas de mise en correspondance précise entre des thématiques et ces catégories. Ainsi, le raisonnement proportionnel intervient dans des contextes très variés, notamment la conversion de mesures, l'analyse de relations linéaires, le calcul de probabilité ou la comparaison de la longueur des côtés de formes similaires. Les contenus décrits ci-dessous montrent que bon nombre de ces concepts sont au cœur des quatre catégories et confirment la cohérence des mathématiques en tant que discipline. Il s'agit plus d'exemples de contenus inclus dans l'épreuve de mathématiques du cycle PISA 2012 que d'une liste exhaustive :

- *Fonctions* : le concept de fonction, notamment (mais pas exclusivement) les fonctions linéaires, leurs propriétés et une série de descriptions et de représentations. Les représentations verbales, symboliques et graphiques, ainsi que les représentations sous forme de tableaux, sont souvent utilisées.
- *Expressions algébriques* : l'interprétation verbale et la manipulation d'expressions algébriques, comprenant des nombres, des symboles, des opérations arithmétiques, des puissances et des racines simples.
- *Équations et inéquations* : des équations et inéquations linéaires, des équations simples du second degré, et des méthodes analytiques et non analytiques de résolution.
- *Systèmes de coordonnées* : la représentation et la description de données, de positions et de relations.
- *Relations dans et entre des objets géométriques en deux et en trois dimensions* : des relations statiques telles que des liens algébriques entre des éléments de figures (par exemple, le théorème de Pythagore, qui définit la relation entre la longueur des côtés d'un triangle rectangle), les positions relatives, la similitude et la congruence, et les relations dynamiques impliquant la transformation et le mouvement d'objets, ainsi que les correspondances entre objets en deux et en trois dimensions.

- *Mesure* : la quantification de formes et d'objets et de certains de leurs aspects, par exemple l'angle, la distance, la longueur, le périmètre, la circonférence, la superficie et le volume.
- *Nombres et unités* : les concepts, les représentations de nombres et les systèmes de numération, dont les propriétés de nombres entiers et rationnels, des aspects pertinents des nombres irrationnels, ainsi que des quantités et des unités en rapport avec des phénomènes tels que le temps, l'argent, le poids, la température, la distance, la superficie et le volume, ainsi que des quantités dérivées et leur description numérique.
- *Opérations arithmétiques* : la nature et les propriétés des opérations numériques, et les conventions d'écriture qui s'y rapportent.
- *Pourcentages, ratios et proportions* : la description numérique de grandeur relative et le raisonnement fondé sur les proportions pour résoudre des problèmes.
- *Principes de comptage* : les permutations et les combinaisons simples.
- *Estimation* : l'approximation dans un but particulier de quantités et expressions numériques, notamment les chiffres significatifs et les arrondis.
- *Collecte, représentation et interprétation de données* : la nature, l'origine et la collecte de divers types de données, et les différents modes de représentation et d'interprétation des données.
- *Variabilité des données et descriptionde cette dernière* : les concepts tels que la variabilité, la distribution et les tendances principales dans des groupes de données, les modes de description et d'interprétation de ces concepts en termes quantitatifs.
- *Échantillonnage et échantillons* : les concepts d'échantillonnage dans des groupes de données, notamment la formulation d'inférences simples sur la base des propriétés des échantillons.
- *Risque et probabilité* : les concepts tels que les événements aléatoires, la variation aléatoire et sa représentation, le risque et la fréquence des événements, et les aspects fondamentaux du concept de probabilité.

Contextes

L'un des aspects importants de la culture mathématique réside dans l'utilisation des mathématiques pour résoudre des problèmes en contexte. Par contexte, on entend la place des problèmes dans le monde des individus. Le choix de représentations et stratégies mathématiques appropriées dépend souvent du contexte dans lequel les problèmes se posent. De l'avis général, situer les problèmes dans un contexte permet d'accroître la difficulté des items (voir les conclusions en rapport avec la statistique de Watson et Callingham, 2003). La grande diversité des contextes utilisés est un aspect important de l'enquête PISA, car elle permet de potentiellement mettre en correspondance les centres d'intérêt des individus et les situations dans lesquelles les individus fonctionnent au XXIe siècle.

Le cadre d'évaluation de la culture mathématique du cycle PISA 2012 définit quatre catégories de contextes qui sont utilisées pour répartir les items constituant les épreuves PISA :

- *Personnel* : les problèmes classés dans cette catégorie portent sur les activités des individus, de leur famille et de leurs pairs. Parmi les contextes à considérer comme personnels, citons notamment la préparation des repas, les achats, les jeux, la santé individuelle, les moyens de transport, le sport, les voyages, l'emploi du temps et le budget personnel. L'item *PIZZAS* (voir la section « Exemples d'items PISA » en fin de chapitre) se situe dans un contexte personnel, car les élèves doivent déterminer quelle pizza est la plus avantageuse en termes de rapport quantité-prix. Il en va de même pour les deux items de l'unité PISA *MARCHE À PIED* (voir la section « Exemples d'items PISA » en fin de chapitre), qui se situent dans un contexte personnel. Les élèves doivent utiliser une même formule mathématique pour calculer la longueur de pas d'un individu dans le premier item et la vitesse de marche d'un autre individu dans le deuxième item.
- *Professionnel* : les problèmes classés dans la catégorie des contextes professionnels se situent dans le monde du travail. Parmi les contextes à considérer comme professionnels, citons notamment ceux en rapport avec le mesurage, les devis et les commandes de matériaux de construction, par exemple, la comptabilité et la gestion des salaires, le contrôle de la qualité, les inventaires et les prévisions, le design et l'architecture, et la prise de décisions dans le cadre de la vie professionnelle. Les contextes professionnels peuvent concerner toutes les classes de main-d'œuvre, des travailleurs non qualifiés à ceux qui exercent les plus hautes fonctions, même si les items PISA doivent être accessibles à des élèves âgés de 15 ans. L'item *MENUISIER* (voir la section « Exemples d'items PISA » en fin de chapitre) se classe dans la catégorie des contextes professionnels, car il porte sur une bordure qu'un menuisier doit fabriquer autour d'un jardin. L'item de l'unité PISA *PIZZAS* évoqué ci-dessus se classerait également dans cette catégorie s'il portait sur le point de vue du vendeur de pizzas et non de l'acheteur de pizzas.

- *Sociétal* : les problèmes classés dans la catégorie des contextes sociétaux se situent dans la communauté (locale, nationale ou mondiale). Parmi les contextes à considérer comme sociétaux, citons notamment ceux en rapport avec les systèmes électoraux, les transports publics, les gouvernements, les pouvoirs publics, la démographie, la publicité, les statistiques nationales et l'économie. Les individus sont impliqués dans tous ces contextes à titre personnel, mais les problèmes relevant de cette catégorie se présentent avant tout sous l'angle de la collectivité. L'item *CONCERT ROCK* (voir la section « Exemples d'items PISA » en fin de chapitre) est un exemple d'item classé dans la catégorie des contextes sociétaux, car il se situe dans le cadre de l'organisation d'un concert de rock, même s'il se base sur une expérience personnelle, en l'occurrence se trouver dans une foule.
- *Scientifique* : les problèmes classés dans la catégorie des contextes scientifiques traitent de l'application des mathématiques dans le monde naturel, ainsi que dans des thématiques en rapport avec la science et la technologie. Parmi les contextes à considérer comme scientifiques, citons notamment les contextes en rapport avec la météorologie ou le climat, l'écologie, la médecine, l'espace, la génétique, le mesurage et les mathématiques. L'item publié de l'unité PISA *DÉCHETS* (voir la section « Exemples d'items PISA » en fin de chapitre) est un exemple d'item classé dans la catégorie des contextes scientifiques, car il porte sur des aspects scientifiques en rapport avec l'environnement, plus précisément sur le temps de décomposition des déchets. Les items intramathématiques, dont tous les éléments ont trait au monde des mathématiques, se classent dans la catégorie des contextes scientifiques.

Les items PISA qui partagent le même stimulus sont regroupés par unité. Il est dès lors courant que tous les items d'une même unité se classent dans la même catégorie de contextes. Il y a toutefois quelques exceptions : il se peut, par exemple, que le stimulus d'une unité soit analysé sous l'angle individuel dans un item, mais sous l'angle sociétal dans un autre item. Si un item inclut uniquement des *constructs* mathématiques sans la moindre référence à des éléments contextuels de l'unité dont il relève, il se classe dans la catégorie de contextes à laquelle l'unité appartient. Dans les rares cas où une unité inclut uniquement des *constructs* mathématiques sans la moindre référence à un contexte sans rapport avec les mathématiques, cette unité se classe dans la catégorie des contextes scientifiques.

L'utilisation de ces catégories de contextes permet de constituer une gamme de contextes d'item et de garantir que les épreuves reflètent un large éventail d'applications des mathématiques, des applications dans la vie courante à celles requises pour résoudre des problèmes mondiaux. De plus, il est important que chaque catégorie de contextes comprenne des items dont le degré de difficulté varie. Comme ces catégories ont été définies pour soumettre aux élèves des problèmes dans des contextes très différents, chaque catégorie doit largement contribuer à l'évaluation de la culture mathématique. Il faut éviter que le degré de difficulté des items d'une catégorie soit systématiquement plus ou moins élevé que celui des items d'une autre catégorie.

Lors de l'identification des contextes qui peuvent se révéler pertinents, il est essentiel de garder présent à l'esprit que les épreuves ont pour but d'évaluer dans quelle mesure les élèves sont capables d'utiliser les contenus, processus et facultés mathématiques qu'ils ont acquis jusqu'à l'âge de 15 ans. C'est la raison pour laquelle les contextes des items sont choisis pour leur pertinence par rapport aux centres d'intérêt et à la vie des élèves, et en fonction des défis qu'ils auront à relever dès qu'ils commenceront à avoir un rôle social en tant que citoyens constructifs, engagés et réfléchis. Les directeurs nationaux de projet des pays qui participent à l'enquête PISA contribuent à l'évaluation de ce degré de pertinence.

ÉVALUER LA CULTURE MATHÉMATIQUE

Cette section décrit l'approche adoptée pour traduire concrètement les aspects du cadre d'évaluation du cycle PISA 2012 présentés ci-dessus, notamment la structure des épreuves PISA de mathématiques, la façon de rendre compte des niveaux de compétence en mathématiques, les savoirs et savoir-faire explorés dans le domaine de la culture mathématique, et les dispositions prises pour administrer l'épreuve informatisée de mathématiques.

Structure des épreuves de mathématiques lors du cycle PISA 2012

En vertu de la définition de la culture mathématique, les items constituant les épreuves PISA, qu'il s'agisse de l'épreuve papier-crayon ou de l'épreuve informatisée, doivent se situer dans un contexte. Pour répondre aux items, les élèves âgés de 15 ans doivent appliquer d'importants concepts, savoirs et savoir-faire en mathématiques (les contenus mathématiques) à un niveau approprié à leur âge, comme cela a été expliqué ci-dessus. Le cadre d'évaluation sert à orienter la structure et le contenu de l'évaluation, et il est important que les épreuves, qu'il s'agisse de l'épreuve papier-crayon ou de l'épreuve informatisée, soient constituées d'items qui reflètent les composantes du cadre d'évaluation de la culture mathématique.

Répartition souhaitée du score entre les processus mathématiques

De plus, les items des épreuves de mathématiques du cycle PISA 2012 sont associés à l'un des trois processus mathématiques. L'objectif lors de la conception des épreuves, c'est d'obtenir un équilibre par lequel la pondération est assez égale entre les deux processus qui consistent à établir un lien entre le monde réel et le monde des mathématiques, et le processus qui demande aux élèves de résoudre un problème énoncé sous une forme mathématique.

Tableau 1.1

Répartition approximative du score en mathématiques entre les catégories de processus

Catégorie de processus	Pourcentage de points
Formuler des situations de façon mathématique	25 % environ
Employer des concepts, faits, procédures et raisonnements mathématiques	50 % environ
Interpréter, appliquer et évaluer des résultats mathématiques	25 % environ
TOTAL	100 %

Il importe de souligner ici que dans chaque catégorie, les items s'étendent sur tout le spectre de difficulté.

Répartition souhaitée du score entre les catégories de contenus

Les items PISA de mathématiques sont choisis pour refléter les contenus mathématiques décrits ci-avant. Les items choisis lors du cycle PISA 2012 se répartissent entre les quatre catégories de contenus mathématiques comme le montre le tableau 1.2. Lors de la conception des épreuves, l'objectif est d'obtenir une répartition des items qui soit la plus équilibrée possible entre les contenus mathématiques, car tous ces domaines sont importants pour des citoyens constructifs, engagés et réfléchis.

Tableau 1.2

Répartition approximative du score en mathématiques entre les catégories de contenus

Catégorie de contenus	Pourcentage de points
Variations et relations	25 % environ
Espace et formes	25 % environ
Quantité	25 % environ
Incertitude et données	25 % environ
TOTAL	100 %

Il importe de souligner ici que dans chaque catégorie, les items s'étendent sur tout le spectre de difficulté.

Répartition souhaitée du score entre les catégories de contextes

Dans l'enquête PISA 2012, tous les items se classent dans l'une des quatre catégories de contextes. Les items retenus pour constituer les épreuves de mathématiques du cycle PISA 2012 se répartissent entre ces catégories de contextes, comme le montre le tableau 1.3. Cette répartition équilibrée permet de faire en sorte qu'aucun type de contexte ne prédomine : les élèves se voient donc présenter des items dans un large éventail de contextes correspondant à un grand nombre de centres d'intérêt personnels et un grand nombre de situations que les individus sont susceptibles de rencontrer dans la vie.

Tableau 1.3.

Répartition approximative du score en mathématiques entre les catégories de contextes

Catégorie de contextes	Pourcentage de points
Contextes personnels	25 % environ
Contextes professionnels	25 % environ
Contextes sociétaux	25 % environ
Contextes scientifiques	25 % environ
TOTAL	100 %

Il importe de souligner ici que dans chaque catégorie, les items s'étendent sur tout le spectre de difficulté.

Le spectre de difficulté des items

Les épreuves de mathématiques du cycle PISA 2012 sont constituées d'items dont le degré de difficulté varie, comme les facultés des élèves âgés de 15 ans. Elles comportent des items difficiles même pour les élèves les plus brillants, ainsi que des items adaptés aux élèves les moins performants. D'un point de vue psychométrique, une évaluation destinée à évaluer une cohorte spécifique d'individus est la plus efficace et la plus efficiente lorsque la difficulté des items est semblable à la faculté des sujets évalués. De plus, les échelles de compétence qui sont utilisées pour rendre compte des résultats ne sont révélatrices des facultés de tous les élèves que si les items à partir desquels les compétences sont décrites s'étendent sur le spectre de compétence décrit. Les échelles de compétence se basent sur des niveaux croissants d'activation des facultés fondamentales en mathématiques, qui sont décrites de façon détaillée dans l'encadré 1.1 « Les facultés mathématiques fondamentales et leur relation avec la difficulté des items ». Il ressort des cycles PISA précédents qu'ensemble, ces facultés sont des indicateurs de la charge cognitive et, donc, qu'elles contribuent à la difficulté des items (Turner, 2012 ; Turner *et al.*, à paraître). Une échelle de compétence PISA a été élaborée après l'essai de terrain du cycle PISA 2012 sur la base de la description de l'activation de ces compétences. Cette échelle permet de mesurer, de façon empirique, la charge cognitive de chaque item.

Structure des instruments d'évaluation

En mathématiques, les épreuves papier-crayon du cycle PISA 2012 sont constituées à partir d'une batterie d'items de 270 minutes. Cette batterie est divisée en neuf blocs d'items, de 30 minutes de test chacun. Sur ces neuf blocs, trois (soit 90 minutes de test) contiennent des items d'ancrage, qui ont été administrés lors de cycles PISA antérieurs, quatre blocs standard (soit 120 minutes de test) contiennent de nouveaux items dont le degré de difficulté varie sensiblement, et deux (soit 60 minutes de test) contiennent des items « faciles », dont le degré de difficulté est inférieur.

Chaque pays participant administre sept des neuf blocs d'items : les trois blocs contenant des items d'ancrage, deux des blocs contenant de nouveaux items et soit les deux autres blocs « standard », soit les deux blocs « faciles ». Proposer au choix les blocs « faciles » et « standard » permet de mieux cibler l'évaluation dans chaque pays participant. Toutefois, les items sont mis à l'échelle de sorte que le score d'un pays ne pâtira pas que les blocs « faciles » ou « standard » soient administrés. Les blocs d'items sont répartis par rotation entre des carnets de test, de sorte que les épreuves contiennent quatre blocs d'items en mathématiques, en compréhension de l'écrit et en sciences. Chaque élève répond aux items d'un carnet, ce qui représente 120 minutes de test au total.

L'épreuve informatisée de mathématiques (*Computer-Based Component of Mathematics*, CBAM) contient 80 minutes de test au total. Les items sont répartis en quatre blocs de 20 minutes de test. Les carnets de test sont constitués par rotation des blocs et contiennent deux blocs d'items chacun, ainsi que du matériel destiné à l'administration informatisée de l'épreuve. Chaque élève répond aux items d'un carnet, ce qui représente 40 minutes de test.

Structure des épreuves de mathématiques lors du cycle PISA 2012

Trois formats d'items sont utilisés dans l'épreuve papier-crayon d'évaluation de la culture mathématique conçue pour le cycle PISA 2012 : des items à réponse construite ouverte, des items à réponse construite fermée et des items à choix multiple. Dans les items à réponse construite ouverte, les élèves doivent fournir une réponse écrite un tant soit peu élaborée, et ils doivent aussi parfois expliquer le cheminement vers leur réponse ou montrer les étapes qu'ils ont enchaînées pour y aboutir. Ces items sont corrigés manuellement par des correcteurs spécialement formés à cet effet. Les items à réponse construite fermée offrent aux élèves un cadre plus structuré pour présenter leur réponse, qui peut dès lors être jugée plus facilement comme correcte ou incorrecte. Souvent, les réponses des élèves à ces items peuvent être saisies dans une base de données, puis codées automatiquement, mais il arrive que des correcteurs spécialement formés doivent intervenir. Les réponses construites fermées se résument la plupart du temps à un chiffre. Dans les items à choix multiple, les élèves doivent choisir une ou plusieurs options de réponse. Leurs réponses peuvent généralement être codées automatiquement. Les trois formats d'items sont représentés en proportions similaires dans les épreuves.

D'autres formats d'items sont utilisés dans l'épreuve informatisée de mathématiques. L'environnement informatique se prête à une plus grande variété de modes de réponse que dans les épreuves papier-crayon et facilite l'évaluation de certains aspects de la culture mathématique, notamment la manipulation et la rotation de formes en trois dimensions qu'il n'est pas aussi aisé d'évaluer sur papier. Il permet également d'améliorer la présentation des items. Ainsi, on peut utiliser un stimulus mobile, des représentations d'objets en trois dimensions qu'il est possible de faire pivoter, ou des moyens d'accès plus flexibles à des données ou des informations pertinentes. Cet environnement offre également la possibilité d'employer des formats d'items associés à un éventail plus large de types de réponse. Par exemple, les fonctions « glisser-déplacer » ou l'utilisation de points sur une image permettent aux élèves de répondre à davantage d'items de façon non verbale, ce qui donne une image plus précise d'une culture mathématique moins associée à

l'expression. Une certaine interactivité est possible dans certains cas. De plus, le codage automatisé des réponses permet d'éviter une partie du travail manuel. Le plus important réside dans le fait que ce type d'épreuves permet de faciliter le codage de caractéristiques dans les schémas que réalisent les élèves, les pages qu'ils affichent et les procédures qu'ils utilisent, ce qui est impossible dans d'autres environnements (Stacey et Wiliam, à paraître).

Les épreuves PISA de mathématiques sont constituées d'*unités* qui comprennent le stimulus verbal et souvent d'autres d'informations, par exemple des tableaux, des diagrammes, des cartes ou des graphiques, ainsi que un ou plusieurs items en rapport avec le stimulus. Grâce à ce format, les élèves ont la possibilité de se plonger dans le contexte ou le problème en répondant à plusieurs items. Toutefois, le modèle de mesure utilisé pour analyser les données PISA suppose que les items sont indépendants les uns des autres : dès qu'une unité compte plus d'un item, les développeurs de test s'efforcent d'assurer que les items soient les plus indépendants possible les uns des autres. Cette structure par unité a été retenue dans l'enquête PISA, car elle facilite l'utilisation de contextes aussi réalistes que possible qui reflètent la complexité des situations dans le monde réel tout en exploitant au mieux le temps de passation des épreuves. Toutefois, il est important de garantir un éventail adéquat de contextes pour minimiser le risque de biais dû aux contextes choisis et optimiser l'indépendance des items. Les concepteurs des instruments PISA cherchent donc à concilier ces deux impératifs contradictoires.

Les items retenus pour constituer les épreuves PISA se répartissent sur un spectre étendu de difficulté, correspondant au spectre étendu de compétences des élèves. De plus, les grandes catégories de contenus, de processus et de contextes sont autant que possible représentées par des items dont le degré de difficulté varie fortement. Le degré de difficulté des items est déterminé entre autres propriétés lors d'un essai de terrain à grande échelle avant la sélection des items qui seront administrés lors de la campagne définitive. Les items sont sélectionnés pour constituer les épreuves PISA en fonction de leur adéquation avec les catégories définies dans le cadre et de leurs propriétés en matière d'évaluation.

De plus, le niveau de compétence en compréhension de l'écrit requis pour réussir à aborder un item fait l'objet d'une grande attention lors de la conception et de la sélection des items. Lors de la conception des items, on s'efforce de formuler les items de la façon la plus simple et la plus directe possible. On s'emploie également à éviter des contextes qui créeraient un biais culturel et tous les choix sont vérifiés avec les équipes nationales. La traduction des items dans de nombreuses langues différentes est un processus qui est mené avec grand soin et qui prévoit de nombreuses procédures de rétro traduction et autres. Le risque de biais a fait l'objet d'une plus grande attention encore lors du cycle PISA 2012, dans la mesure où l'épreuve informatisée pourrait poser des difficultés aux élèves qui n'ont pas accès à un ordinateur en cours de mathématiques.

Outils mathématiques

Selon l'approche retenue dans l'enquête PISA, les élèves peuvent utiliser une calculatrice pour répondre aux épreuves papier-crayon si c'est d'usage dans leur établissement. C'est ce qui permet d'évaluer de la manière la plus authentique ce que les élèves sont capables de faire et d'effectuer la comparaison la plus riche en informations entre les systèmes d'éducation. Le fait qu'un système d'éducation ait choisi d'autoriser ou non ses élèves à utiliser une calculatrice ne diffère en rien, en principe, de toutes les autres orientations de la politique de l'éducation, sur lesquelles l'enquête PISA n'exerce pas de contrôle. Lors du cycle PISA 2012, c'est la première fois que certains items des épreuves papier-crayon de mathématiques ont été conçus de sorte que l'usage d'une calculatrice facilite et accélère les calculs – en d'autres termes, il est probable que l'usage d'une calculatrice avantage de nombreux élèves dans certains items. Dans ces épreuves papier-crayon de mathématiques, une calculatrice de base avec fonctions arithmétiques suffit.

Dans l'épreuve informatisée de mathématiques proposée à titre d'option lors du cycle PISA 2012, les élèves ont accès à un logiciel de calcul ou une calculatrice en ligne pour répondre aux items où cela est pertinent. Ils peuvent également utiliser une calculatrice si leur système d'éducation l'autorise à l'âge de 15 ans. Ils peuvent être amenés à utiliser d'autres outils pendant les épreuves, par exemple des instruments de mesure, des fonctions élémentaires de tableurs et des outils de représentation graphique ou de visualisation.

Codage des items

La majorité des items sont corrigés de façon dichotomique (les réponses valent ou non un crédit). Certains des items à réponse construite ouverte peuvent toutefois valoir un crédit partiel, en fonction de la mesure dans laquelle les réponses sont correctes. Des consignes détaillées de correction (crédit complet, crédit partiel et pas de crédit) sont fournies aux correcteurs formés pour coder les réponses à ces items, ce qui permet de garantir que le codage des items est effectué d'une façon uniforme et fiable dans tous les pays participants.

Présentation du niveau de compétence en mathématiques

Les résultats aux épreuves PISA de mathématiques sont présentés de différentes façons. Le niveau global de culture mathématique est estimé sur une échelle de compétence à partir des échantillons d'élèves dans chaque pays. Le degré de culture mathématique associé à chaque niveau de l'échelle de compétence est décrit. De plus, des aspects de la culture mathématique pertinents pour l'action publique dans les pays participants sont identifiés et le niveau de compétence des élèves est estimé sur des échelles correspondant à ces différents aspects. Les aspects susceptibles d'être utilisés pour rendre compte des résultats peuvent se définir de différentes façons. Lors du cycle PISA 2003, les quatre grandes catégories de contenu ont été retenues pour construire des échelles de compétence. La figure 1.3 décrit les six niveaux de compétence de l'échelle globale de compétence en mathématiques utilisée pour rendre compte des résultats aux épreuves PISA en 2003, 2006 et 2009. Ces niveaux sont à la base de l'échelle PISA de compétence en mathématiques du cycle PISA 2012.

■ Figure 1.3 ■

Description de l'échelle de compétence en mathématiques (2003-2009)

Niveau	
6	Au niveau 6, les élèves sont capables de conceptualiser, de généraliser et d'utiliser des informations sur la base de leurs propres recherches et de la modélisation de problèmes complexes. Ils peuvent établir des liens entre différentes représentations et sources d'information, et passer de l'une à l'autre sans difficulté. Ils peuvent se livrer à des raisonnements et à des réflexions mathématiques difficiles. Ils peuvent s'appuyer sur leur compréhension approfondie et leur maîtrise des relations symboliques et des opérations mathématiques classiques pour élaborer de nouvelles approches et de nouvelles stratégies à appliquer lorsqu'ils sont face à des situations qu'ils n'ont jamais rencontrées. Ils peuvent décrire clairement et communiquer avec précision leurs actes et les fruits de leur réflexion – résultats, interprétations, arguments – qui sont en adéquation avec les situations initiales.
5	Au niveau 5, les élèves peuvent élaborer et utiliser des modèles dans des situations complexes pour identifier des contraintes et construire des hypothèses. Ils sont capables de choisir, de comparer et d'évaluer des stratégies de résolution de problèmes leur permettant de s'attaquer à des problèmes complexes en rapport avec ces modèles. Ils peuvent aborder les situations sous un angle stratégique en mettant en œuvre un grand éventail de compétences pointues de raisonnement et de réflexion, en utilisant les caractérisations symboliques et formelles et les représentations y afférentes, et en s'appuyant sur leur compréhension approfondie de ces situations. Ils peuvent réfléchir à leurs actes, et formuler et communiquer leurs interprétations et leur raisonnement.
4	Au niveau 4, les élèves sont capables d'utiliser des modèles explicites pour faire face à des situations concrètes complexes qui peuvent leur demander de tenir compte de contraintes ou de construire des hypothèses. Ils peuvent choisir et intégrer différentes représentations, dont des représentations symboliques, et les relier directement à certains aspects de situations tirées du monde réel. Ils peuvent mettre en œuvre un éventail de compétences pointues dans ces situations et raisonner avec une certaine souplesse en s'appuyant sur leur compréhension de ces contextes. Ils peuvent formuler des explications et des arguments sur la base de leurs interprétations et de leurs actions, et les communiquer.
3	Au niveau 3, les élèves peuvent appliquer des procédures bien définies, dont celles qui leur demandent des décisions séquentielles. Ils peuvent choisir et mettre en œuvre des stratégies simples de résolution de problèmes. Ils peuvent interpréter et utiliser des représentations basées sur différentes sources d'information, et construire leur raisonnement directement sur cette base. Ils peuvent rendre compte succinctement de leurs interprétations, de leurs résultats et de leur raisonnement.
2	Au niveau 2, les élèves peuvent interpréter et reconnaître des situations dans des contextes qui leur demandent tout au plus d'établir des inférences directes. Ils ne peuvent puiser des informations pertinentes que dans une seule source d'information et n'utiliser qu'un seul mode de représentation. Ils sont capables d'utiliser des algorithmes, des formules, des procédures ou des conventions élémentaires. Ils peuvent se livrer à un raisonnement direct et interpréter les résultats de manière littérale.
1	Au niveau 1, les élèves peuvent répondre à des questions s'inscrivant dans des contextes familiers, dont la résolution ne demande pas d'autres informations que celles présentes et qui sont énoncées de manière explicite. Ils sont capables d'identifier les informations et d'appliquer des procédures de routine sur la base de consignes directes dans des situations explicites. Ils peuvent exécuter des actions qui vont de soi et qui découlent directement du stimulus donné.

Trois sous-échelles de compétence ont été élaborées de la même façon que l'échelle globale de compétence en mathématiques, après l'essai de terrain, sur la base des trois processus mathématiques décrits auparavant : *formuler des situations de façon mathématique* ; *employer des concepts, faits, procédures et raisonnements mathématiques* ; et enfin, *interpréter, appliquer et évaluer des résultats mathématiques*.

Les facultés mathématiques fondamentales jouent un rôle central dans la définition des différents niveaux de l'échelle globale de culture mathématique et des sous-échelles de processus – elles définissent l'accroissement de compétence dans tous ces aspects de la culture mathématique. Par exemple, dans la description du niveau 4 de l'échelle de compétence (voir la figure 1.3), la deuxième phrase souligne des aspects de la mathématisation et de la représentation

qui sont évidents à ce niveau de compétence, et la dernière phrase met l'accent sur les facultés de communication, de raisonnement et d'argumentation caractéristiques de ce niveau, les comparant à celles, inférieures et supérieures respectivement, associées au niveau 3 et au niveau 5. À la fin de ce chapitre, l'encadré 1.1 « Les facultés mathématiques fondamentales et leur relation avec la difficulté des items » décrit les facultés mathématiques fondamentales et explique leur lien avec les niveaux de culture mathématique. Les processus mathématiques ont été décrits auparavant dans ce chapitre et dans la figure 1.2 en fonction des facultés mathématiques fondamentales qu'ils font intervenir.

Des échelles de compétence ont été également définies pour les quatre catégories de contenus – *Quantité*, *Espace et formes*, *Variations et relations,* et enfin, *Incertitude et données* – par souci de cohérence avec la présentation des résultats de mathématiques lors du cycle PISA 2003, soit la première fois où les mathématiques ont été domaine majeur d'évaluation, et en raison de leur pertinence pour éclairer l'action publique. Ces échelles restent intéressantes pour les pays, car elles sont révélatrices de certains aspects de la culture mathématique en rapport avec des priorités spécifiques des programmes de cours.

Attitudes envers les mathématiques

Les attitudes, les convictions et les émotions des individus peuvent jouer un rôle important dans l'intérêt qu'ils portent aux mathématiques, ainsi que dans la façon dont ils y réagissent en général et les utilisent dans leur vie. Les élèves qui se sentent plus à l'aise en mathématiques sont, par exemple, plus susceptibles que les autres d'utiliser les mathématiques dans les différentes situations qu'ils rencontrent. Les élèves chez qui les mathématiques suscitent des émotions positives sont plus susceptibles de mieux apprendre les mathématiques que ceux chez qui elles créent de l'anxiété. L'un des objectifs des cours de mathématiques doit donc être de faire naître chez les élèves des attitudes, des convictions et des émotions qui les rendent plus susceptibles d'utiliser les notions de mathématiques qu'ils connaissent et d'en apprendre davantage dans cette matière, par intérêt personnel et social.

L'attention accordée à ces variables dans les épreuves de mathématiques du cycle PISA 2012 découle de la thèse selon laquelle le développement de convictions, d'émotions et d'attitudes positives envers les mathématiques est en soi un résultat précieux des cours, et prédispose les élèves à utiliser les mathématiques dans la vie. Ces variables peuvent aussi contribuer à expliquer la variation de la culture mathématique entre les élèves. C'est pourquoi les épreuves PISA de mathématiques contiennent des items en rapport avec ces variables. De plus, l'enquête PISA enregistre une série de variables contextuelles qui permettent de rendre compte de la culture mathématique et de l'analyser dans des sous-groupes importants d'élèves (par exemple, en fonction du sexe, de la langue parlée ou de l'ascendance allochtone).

Pour recueillir des informations contextuelles, les élèves et les chefs d'établissement sont invités à répondre à un questionnaire, ce qui leur prend entre 20 et 30 minutes. Ces questionnaires sont au cœur de la présentation et de l'analyse des résultats en fonction des profils des élèves et des établissements.

Deux grandes catégories d'attitudes envers les mathématiques qui prédisposent les élèves à s'intéresser aux mathématiques de façon productive ont été identifiées pour leur intérêt potentiel et ont été ajoutées aux épreuves de mathématiques du cycle PISA 2012. Il s'agit de l'intérêt des élèves pour les mathématiques et de leur volonté de s'y engager.

L'intérêt pour les mathématiques recèle des aspects en rapport avec l'activité présente et à venir. Parmi les items qui s'y rapportent, citons ceux qui cherchent à déterminer dans quelle mesure les élèves s'intéressent aux mathématiques à l'école, jugent que les mathématiques sont utiles dans la vie et envisagent d'exercer une profession en lien avec les mathématiques. Ce dernier point est préoccupant dans le monde : de nombreux pays participants voient en effet diminuer le pourcentage d'individus qui choisissent de suivre des études en mathématiques, alors que la demande de diplômés dans cette matière augmente.

La volonté des élèves de faire des mathématiques dépend d'attitudes, d'émotions et de convictions qui disposent les élèves à tirer parti ou non de la culture mathématique qu'ils ont acquise. Les élèves qui prennent plaisir à faire des mathématiques et qui se sentent à l'aise dans cette matière sont plus susceptibles d'utiliser les mathématiques pour réfléchir aux situations qu'ils rencontrent dans les différentes facettes de leur vie, à l'école ou ailleurs. Les *constructs* retenus dans l'enquête PISA à ce sujet sont les suivants : le plaisir, la confiance, l'anxiété (ou l'absence d'anxiété), l'image de soi et l'efficacité perçue. Selon une analyse récente du parcours ultérieur de jeunes Australiens qui avaient obtenu de piètres résultats aux épreuves PISA à l'âge de 15 ans, les individus parmi eux qui reconnaissent la valeur des mathématiques pour leur réussite à l'avenir sont plus susceptibles de concrétiser cette réussite, notamment de retirer de la satisfaction de nombreux aspects de leur vie personnelle et professionnelle (Thomson et Hillman, 2010, p. 31). Cette étude recommande d'insister sur les applications pratiques des mathématiques dans la vie de tous les jours, car cela pourrait améliorer les perspectives qui s'offrent à ces élèves peu performants.

Le questionnaire « Élève » inclut également des séries d'items sur les *possibilités d'apprentissage*. Ces items se rapportent à l'expérience des élèves au sujet de problèmes de mathématiques appliquées de différents types, à la mesure dans laquelle le nom de concepts mathématiques est familier aux élèves (des leurres ont été prévus pour obtenir des résultats probants) et à l'expérience vécue par les élèves en classe ou durant des épreuves de mathématiques telles que les épreuves PISA. Ces variables permettront d'approfondir l'analyse des résultats de l'enquête PISA.

Les résultats du cycle PISA 2012 fourniront des informations importantes aux responsables de la politique de l'éducation dans les pays participants au sujet du rendement des élèves ainsi que de leurs attitudes. Combiner les résultats aux épreuves PISA de mathématiques et les données sur les attitudes, les convictions et les émotions qui prédisposent les élèves à utiliser leur culture mathématique permet de brosser un tableau plus complet.

Épreuve informatisée de mathématiques (facultative)

Le cycle PISA 2012 inclut une épreuve informatisée de mathématiques. Cette épreuve est proposée à titre d'option aux pays participants (étant donné que leurs capacités technologiques sont variables). Deux raisons ont présidé à son inclusion dans le cycle PISA 2012. En premier lieu, l'ordinateur est désormais d'usage sur le lieu de travail et dans la vie quotidienne, de sorte que le degré de culture mathématique au XXI[e] siècle implique l'utilisation de l'informatique (Hoyles *et al.*, 2002). L'informatique intervient dans la vie des individus au quotidien, dans leurs activités personnelles, professionnelles et scientifiques. Elle leur offre des outils pour calculer, se représenter un large éventail de phénomènes, processus ou objets mathématiques, les visualiser, les modifier, les explorer et les expérimenter. La définition de la culture mathématique retenue en vue du cycle PISA 2012 reconnaît l'importance des outils informatiques en soulignant que les individus sont censés les utiliser pour décrire, expliquer et prévoir des phénomènes. Dans cette définition, le terme « outils » désigne les calculatrices, les ordinateurs, ainsi que tout autre objet, comme une règle ou un rapporteur, utilisé comme instrument de mesure ou de construction. La deuxième raison réside dans le fait que l'informatique offre aux concepteurs d'épreuves la possibilité de créer des items plus interactifs, authentiques et intéressants (Stacey et Wiliam, à paraître). Ils peuvent notamment inventer de nouveaux formats d'items (« glisser-déplacer »), soumettre aux élèves des données qui s'inspirent du monde réel (de longues séries de données qu'il est possible de trier) ou utiliser des couleurs et des graphiques pour rendre les épreuves plus attrayantes.

Face à ces phénomènes, l'épreuve informatisée de mathématiques est une innovation majeure du cycle PISA 2012. Les unités PISA spécialement créées à cet effet sont présentées sur ordinateur, et les élèves y répondent par ordinateur. Les élèves peuvent également prendre des notes sur papier pour retracer leurs processus de réflexion. Des items informatisés plus sophistiqués pourraient être proposés lors des cycles PISA suivants, à mesure que les développeurs d'items s'immergeront dans l'environnement des évaluations informatisées. Le cycle PISA 2012 marque uniquement le début de l'exploration du potentiel des épreuves informatisées de mathématiques.

Le fait d'utiliser les fonctionnalités offertes par l'informatique permet de proposer aux élèves des items plus attrayants, plus colorés et plus faciles à comprendre. Il est par exemple possible de soumettre aux élèves un stimulus mobile et des représentations d'objets en trois dimensions qu'ils peuvent faire pivoter, ou de leur donner un accès plus flexible à des informations pertinentes. De nouveaux formats d'items, tels que ceux qui invitent les élèves à « glisser-déplacer » des informations ou à utiliser les « points » d'images, sont conçus pour amener les élèves à s'engager et offrent la possibilité de proposer un éventail plus large de types de réponses et de présenter un tableau plus complet de la culture mathématique.

Des recherches montrent que les exigences mathématiques dans le milieu professionnel augmentent dans les environnements électroniques de sorte que la culture mathématique et l'usage de l'informatique se combinent (Hoyles *et al.*, 2002). Tous les travailleurs, quelle que soit leur place dans la hiérarchie, font face à l'interdépendance de la culture mathématique et de l'usage de l'informatique, une relation que l'épreuve informatisée de l'enquête PISA permet d'explorer. L'un des enjeux majeurs est d'établir une distinction entre les exigences mathématiques d'un item PISA soumis de façon informatisée et les exigences sans lien avec le niveau de compétence en mathématiques, notamment les exigences en technologies de l'information et de la communication (TIC) et les nouveaux formats de présentation. Il est important de souligner à propos des épreuves informatisées du cycle PISA 2012 que tout est mis en œuvre pour que les exigences associées à l'utilisation d'un outil soient nettement inférieures aux exigences mathématiques. Des recherches ont été menées sur l'impact de l'informatisation d'épreuves sur les performances des élèves (Bennett, 2003 ; Bennett *et al.*, 2008 ; Mason *et al.*, 2001 ; Richardson *et al.*, 2002 ; Sandene *et al.*, 2008). Le cycle PISA 2012 est l'occasion d'approfondir ces recherches, en particulier d'enrichir les connaissances au sujet du développement des items en vue des prochaines épreuves informatisées, en 2015 et au-delà. Les items de l'épreuve informatisée ne se baseront pas tous sur de nouveaux formats, ce qui pourrait être utile pour déterminer l'impact (positif ou négatif) que les nouveaux formats ont sur la performance.

Pour contrôler les caractéristiques de l'épreuve informatisée, trois aspects sont décrits dans chaque item :

- **Les compétences mathématiques évaluées**, qui comprennent des aspects de la culture mathématique applicables dans n'importe quel environnement – pas uniquement informatique – et qui sont mesurées dans chaque item informatisé.
- **Les compétences en mathématiques et en informatique**, qui consistent à faire des mathématiques avec l'aide d'outils informatiques ou autres. Ces compétences sont évaluées dans certains des items informatisés (mais pas tous). L'épreuve informatisée peut évaluer les compétences suivantes :
  – créer un graphique (à secteurs, en bâtons, en courbes) à partir de données figurant dans un tableau par exemple, à l'aide d'« assistants » simples ;
  – générer des graphiques de fonctions et les utiliser pour répondre à des questions sur les fonctions ;
  – trier des données et prévoir des stratégies efficientes de tri ;
  – utiliser des calculatrices de poche ou des calculatrices sur ordinateur ;
  – utiliser des instruments virtuels, tels qu'une règle ou un rapporteur virtuel ; et
  – transformer des images à l'aide d'une boîte de dialogue ou de la souris, par exemple faire pivoter des images, les réfléchir ou les traduire.
- **Les compétences en technologies de l'information et de la communication (TIC),** qui sont fondamentales pour répondre à une épreuve informatisée, au même titre que des compétences d'utilisation de l'écrit sont fondamentales pour répondre à une épreuve papier-crayon. Parmi ces compétences, citons la capacité à utiliser du matériel de base (la souris, le clavier, etc.) et la connaissance de conventions élémentaires (les flèches pour se déplacer et les boutons pour exécuter des commandes, par exemple). L'intention est de limiter autant que faire se peut la nécessité d'utiliser ces compétences dans toutes les épreuves informatisées.

SYNTHÈSE

L'objectif de l'enquête PISA concernant la culture mathématique est d'élaborer des indicateurs montrant l'efficacité avec laquelle les pays préparent leurs élèves à utiliser les mathématiques dans tous les aspects de leur vie personnelle, civique et professionnelle, en tant que citoyens constructifs, engagés et réfléchis. Pour ce faire, nous avons défini la culture mathématique dont les composantes importantes sont décrites dans le présent cadre d'évaluation. Les items de mathématiques qui ont été conçus, puis choisis pour constituer les épreuves du cycle PISA 2012 sur la base de cette définition et de ce cadre d'évaluation reflètent l'éventail de contextes, contenus et processus mathématiques pertinents. Ces items permettent de déterminer dans quelle mesure les élèves sont capables d'utiliser ce qu'ils ont appris. Ils amènent les élèves à utiliser leurs connaissances, à s'engager dans des processus et à exploiter leurs facultés pour résoudre des problèmes qui se posent dans des expériences du monde réel. Les problèmes sont présentés sous divers formats et sont accompagnés d'orientations et d'indices sur la structure qui sont plus ou moins explicites, mais l'accent est mis sur l'aspect pratique des problèmes, auxquels les élèves doivent réfléchir eux-mêmes.

Encadré 1.1. **Les facultés mathématiques fondamentales et leur relation avec la difficulté des items**

Analyser les aspects des facultés mathématiques fondamentales qui sont requis pour concevoir, puis appliquer une solution est un bon moyen de déterminer la difficulté empirique des items (Turner, 2012 ; Turner et Adams, 2012 ; Turner *et al.*, à paraître). Les items les plus faciles requièrent l'exploitation de quelques facultés à peine, d'une façon relativement directe. Les items les plus difficiles requièrent l'exploitation complexe de plusieurs facultés. Pour estimer a priori la difficulté des items, il faut tenir compte à la fois du nombre de facultés à mettre en œuvre et de la complexité de leur activation. Les sections suivantes décrivent les caractéristiques qui rendent l'activation d'une faculté plus ou moins complexe (voir également Turner, 2012).

Communication : divers facteurs déterminent le niveau et l'ampleur des exigences d'une tâche en matière de communication, et la capacité des individus à répondre à ces exigences indique la mesure dans laquelle ils possèdent la faculté de communication. Côté réception, ces facteurs sont notamment la longueur et la complexité du texte ou de l'objet à lire et à interpréter, le caractère familier des idées ou des informations auxquelles il est fait référence dans le texte ou l'objet, la mesure dans laquelle il faut dégager les informations pertinentes d'un enchevêtrement d'informations, l'ordre des informations et la mesure dans laquelle cet ordre correspond à l'ordre des processus à mener pour interpréter et utiliser les informations, et la diversité des éléments (texte, graphique, diagramme, tableau, etc.) à interpréter les uns par rapport aux autres. Côté expression, les items les plus faciles sont ceux qui appellent simplement une réponse sous forme de chiffre. La difficulté de la communication augmente lorsque la solution aux items doit être construite, par exemple lorsque les élèves doivent expliquer ou justifier leur résultats oralement ou par écrit.

…

Mathématisation : certaines tâches ne requièrent pas de mathématisation – que ce soit parce que le problème se présente déjà sous une forme suffisamment mathématique ou parce que la relation entre le modèle et la situation qu'il représente n'est pas nécessaire pour résoudre le problème. La mathématisation est la moins difficile lorsque les élèves doivent interpréter un modèle donné et faire des inférences directement ou traduire directement une situation en mathématiques (par exemple, structurer et conceptualiser la situation d'une façon pertinente, identifier et sélectionner des variables pertinentes, réunir des mesures pertinentes et/ou faire des diagrammes). La mathématisation devient plus difficile lorsque les élèves doivent modifier ou utiliser un modèle donné pour comprendre l'évolution de conditions ou interpréter des relations inférées, choisir un modèle familier dans le respect de contraintes limitées et clairement articulées, ou créer un modèle où les variables, les relations et les contraintes sont explicites et claires. À un degré de difficulté plus élevé encore, la mathématisation consiste à créer ou interpréter un modèle dans une situation où de nombreuses hypothèses, variables, relations et contraintes doivent être identifiées ou définies, et à vérifier que le modèle est conforme aux exigences de la tâche ou à évaluer ou comparer des modèles.

Représentation : cette faculté mathématique est la moins difficile à mettre en œuvre lorsque les tâches consistent à manipuler directement une représentation, par exemple passer directement du texte aux chiffres, ou lire directement une valeur dans un graphique ou un tableau. La charge cognitive des tâches augmente en matière de représentation lorsqu'elles requièrent la sélection et l'interprétation d'une représentation standard ou familière par rapport à une situation, et plus encore lorsqu'elles consistent à utiliser ou traduire deux ou plusieurs représentations par rapport à une situation, y compris à modifier une représentation, ou à comprendre et utiliser une représentation non standard au travers d'un processus complexe de décodage et d'interprétation, à concevoir une représentation qui englobe les aspects clés d'une situation complexe, ou à comparer ou à évaluer des représentations différentes.

Raisonnement et argumentation : dans les tâches où l'exploitation de cette faculté est minime, le raisonnement peut consister simplement à suivre les instructions fournies. Les items plus difficiles demandent une certaine réflexion pour établir des liens entre différents fragments d'information afin de faire des inférences (par exemple, établir un lien entre des composantes distinctes d'un problème ou se livrer à un raisonnement direct dans un seul aspect du problème). À un degré de difficulté plus élevé, les items requièrent l'analyse d'informations pour suivre ou créer une argumentation en plusieurs étapes, établir un lien entre plusieurs variables ou raisonner à partir de sources d'information différentes. À un niveau plus élevé encore, les élèves doivent résumer et évaluer des informations, utiliser ou créer un raisonnement en plusieurs étapes pour justifier des inférences, ou faire des généralisations en se basant sur plusieurs fragments d'information et en les combinant dans un but précis.

Conception de stratégies : les tâches où l'exploitation de cette faculté est minime demandent souvent simplement aux élèves de poser des actes, selon une stratégie qui est décrite ou qui va de soi. À un degré de difficulté légèrement plus élevé, les élèves peuvent avoir à choisir une stratégie adaptée compte tenu des informations pertinentes qui leur sont fournies pour aboutir à une conclusion. La charge cognitive est plus élevée lorsque les élèves doivent concevoir et construire une stratégie pour transformer des informations fournies afin d'aboutir à une conclusion. Dans les tâches encore plus difficiles, les élèves doivent construire une stratégie complexe pour trouver une solution exhaustive ou une conclusion généralisée, ou évaluer ou comparer plusieurs stratégies possibles.

Utilisation d'opérations et d'un langage symbolique, formel et technique : la difficulté de l'exploitation de cette faculté varie énormément selon les tâches. Dans les tâches les plus simples, les élèves ne doivent pas utiliser de règles mathématiques ou d'expressions symboliques qui vont au-delà des opérations arithmétiques fondamentales, avec des chiffres peu élevés ou faciles à manipuler. Dans les tâches plus difficiles, ils peuvent avoir à enchaîner des opérations arithmétiques, à utiliser directement une relation fonctionnelle simple soit implicite, soit explicite (une relation linéaire familière, par exemple), à utiliser des symboles mathématiques formels (par substitution directe ou *via* un enchaînement d'opérations arithmétiques impliquant des fractions et des décimales), ou à utiliser directement une définition formelle, une convention ou un concept symbolique de mathématiques. La charge cognitive augmente lorsque les élèves doivent utiliser et manipuler explicitement des symboles (recomposer une formule de façon algébrique, par exemple) ou utiliser des formules, des règles, des définitions, des conventions ou des procédures mathématiques sur la base de la combinaison de plusieurs relations ou concepts symboliques. À un degré de difficulté plus élevé encore, les élèves doivent appliquer des procédures mathématiques formelles en plusieurs étapes, utiliser avec souplesse des relations fonctionnelles ou algébriques, ou utiliser des connaissances et des techniques mathématiques pour produire des résultats. …

Utilisation d'outils mathématiques : dans les tâches qui ne demandent qu'une exploitation minime de cette faculté, les élèves peuvent avoir à utiliser directement des outils familiers (un instrument de mesure, par exemple) dans des situations où ces outils sont d'usage courant. La difficulté augmente lorsque l'utilisation de l'outil implique d'enchaîner des processus ou d'établir des liens entre des informations différentes, que les outils sont moins familiers ou que la situation dans laquelle l'outil doit être utilisé est moins familière. Elle augmente encore lorsque l'outil doit être utilisé pour traiter de nombreux fragments d'information et établir des liens entre eux, que l'outil doit l'être dans une situation qui est assez différente de celle où il est d'usage courant, que l'outil est complexe en soi et offre de nombreuses possibilités, ou que les élèves doivent réfléchir pour comprendre et évaluer les mérites et les limites de l'outil.

EXEMPLES D'ITEMS PISA DE MATHÉMATIQUES

Les items PISA qui suivent ont été rendus publics. Ils illustrent des nuances et des aspects pertinents du cadre d'évaluation du cycle PISA 2012. Les sept items proposés ont été sélectionnés pour montrer l'éventail de types d'items, de processus, de contenus et de contextes, et pour décrire l'activation des facultés mathématiques fondamentales, mais ils ne donnent pas toute la mesure de chaque aspect.

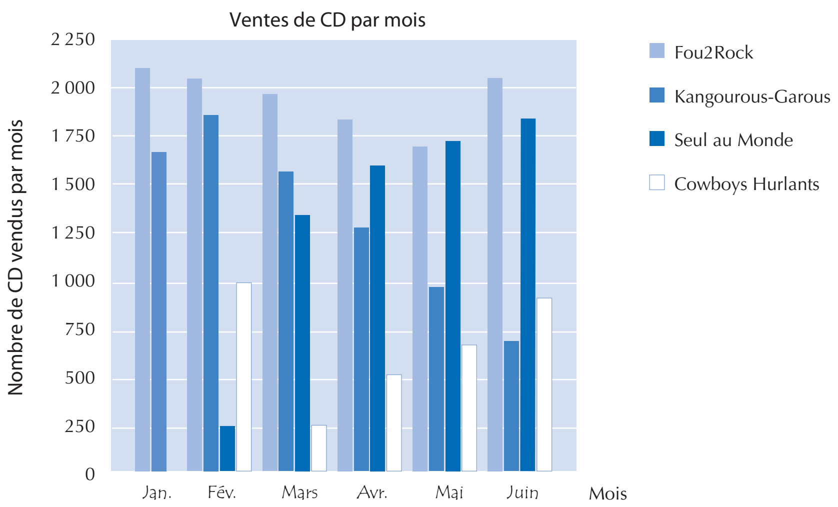
HIT-PARADE

La première unité proposée à titre d'exemple s'intitule *HIT-PARADE*. Elle est constituée d'un stimulus, en l'occurrence un texte et un graphique en bâtons qui montre les ventes de CD de quatre groupes pendant six mois, et de trois items à choix multiple (voir la figure 1.4).

■ Figure 1.4 ■

Items de l'unité *HIT-PARADE*

En janvier, les groupes *Fou2Rock* et *Kangourous-Garous* ont chacun sorti un nouveau CD. En février, c'était au tour des groupes *Seul au Monde* et *Cowboys Hurlants* de sortir chacun leur CD. Le diagramme suivant montre les ventes de ces CD de janvier à juin.



QUESTION 1

Combien de CD le groupe *Cowboys Hurlants* a-t-il vendus en avril ?

A. 250

B. 500

C. 1 000

D. 1 270

QUESTION 2

Au cours de quel mois le groupe *Seul au Monde* a-t-il vendu, pour la première fois, plus de CD que le groupe *Kangourous-Garous* ?

A. Aucun mois

B. Mars

C. Avril

D. Mai

QUESTION 3

Le producteur des *Kangourous-Garous* s'inquiète car le nombre de CD qu'ils ont vendus a diminué de février à juin.

À combien peut-on estimer leurs ventes du mois de juillet si cette tendance à la baisse continue ?

A. 70 CD

B. 370 CD

C. 670 CD

D. 1 340 CD

Les pays PISA ont été invités à remplacer les noms des groupes par des noms de groupes fictifs, adaptés à leur contexte local, lors de la préparation de leur version nationale.

L'unité *HIT-PARADE* a été administrée lors de la campagne définitive du cycle PISA 2012. Les trois items de cette unité se classent dans la catégorie de contenus *Incertitude et données* puisque les élèves doivent lire, interpréter et utiliser des données présentées sous une forme graphique d'ordre mathématique, et dans la catégorie de *Contextes sociétaux*, car les données se rapportent à des informations publiques à propos de ventes de disques que l'on peut trouver dans un journal, un magazine de musique ou en ligne. Les deux premiers items se classent dans la catégorie de processus *Interpréter, appliquer et évaluer des résultats mathématiques*, car ils consistent à interpréter les informations mathématiques présentées dans le graphique par rapport à des caractéristiques du contexte, alors que le troisième item se classe dans la catégorie *Employer des concepts, faits, procédures et raisonnements mathématiques*, car il consiste à appliquer des connaissances en matière de procédures pour manipuler la représentation mathématique, puis faire des inférences. Ces trois items comptent parmi les plus faciles administrés lors de la campagne définitive du cycle PISA 2012.

Dans la question 1 (reprise dans la figure 1.4), les élèves doivent lire directement des données dans le graphique pour répondre à une question en rapport avec le contexte. Ils doivent s'orienter vers les informations fournies, identifier la série de données qui indique les ventes du groupe concerné et le segment qui représente le mois concerné dans cette série de données, puis lire directement la valeur « 500 CD » en ordonnée. Comme le texte est simple et clair, l'item appelle une activation minime de la faculté de *communication*. La *stratégie* à utiliser va de soi : il suffit de localiser les informations demandées dans le graphique. La *mathématisation* consiste à faire une inférence à propos des ventes directement à partir du modèle. La faculté de *représentation* intervient peu, car il suffit de lire une valeur directement dans un graphique. Le format du graphique est censé être familier pour la plupart des adolescents de 15 ans, auxquels le seul effort demandé est de lire l'intitulé des données. L'un des axes du graphique représente des catégories (mois) et la hauteur du bâton est précisée (500), de sorte que les élèves n'ont pas à comprendre d'échelle. Les connaissances *techniques* requises sont minimes, si ce n'est que le format du graphique doit être familier, et seule une inférence directe doit être faite, d'où le niveau très faible de *raisonnement* et d'*argumentation*. Cet item est extrêmement facile : 87 % des élèves y répondu correctement (option B).

La question 2 n'est que légèrement plus difficile : 78 % des élèves environ y ont répondu correctement (option C). Pour y répondre, les élèves doivent observer la relation entre deux séries de données présentées dans le graphique et comprendre son évolution au fil du temps pour réaliser que la situation concernée est apparue pour la première fois en avril.

La difficulté de cet item est similaire à celle du premier item en matière de *communication*. L'activation de la faculté de *stratégie* est légèrement plus difficile, car les élèves doivent associer plusieurs éléments provenant des deux séries de données. La *mathématisation* consiste ici aussi à faire une inférence à propos des ventes, de manière assez directe, à partir du graphique. Cet item est légèrement plus difficile en matière de *représentation* que le premier, car les élèves doivent établir un lien entre les deux séries de données et tenir compte de la variable du temps. Il est aussi facile que le premier en matière d'*utilisation d'opérations et d'un langage symbolique, formel et technique*, car seule une comparaison quantitative est requise. Enfin, il est légèrement plus difficile en matière de *raisonnement* et d'*argumentation*, car les élèves doivent enchaîner plusieurs étapes de raisonnement.

La question 3 est assez différente des deux premières, dans la mesure où elle demande essentiellement aux élèves de comprendre une relation mathématique décrite dans le graphique, puis de l'extrapoler pour prévoir la valeur d'un mois

à venir. Le lien avec le contexte est toujours bien présent, mais les élèves doivent essentiellement travailler sur la base des informations mathématiques qui leur sont fournies. Pour répondre à la question, ils peuvent, par exemple, lire les valeurs de chaque mois dans la série concernée, estimer la réduction moyenne de la valeur de chaque mois, puis appliquer cette réduction à la valeur du dernier mois. La faculté de *communication* intervient peu. Tout l'enjeu est d'éviter de se faire distraire par les séries de données des autres groupes. Toutefois, la seule réponse incorrecte courante, l'option C, est vraisemblablement due à une mauvaise compréhension du passage « si cette tendance à la baisse continue » : 15 % des élèves ont choisi cette option estimant que les ventes seraient les mêmes en juillet qu'en juin. Ils ont peut-être choisi la valeur constante parce qu'elle perpétuait les mauvais chiffres de vente de juin en juillet. La faculté de *stratégie* intervient de toute évidence davantage que dans les deux premières questions et son exploitation requiert un certain suivi. Il y a des décisions à prendre, notamment celle de savoir s'il vaut mieux utiliser les chiffres de ce groupe entre février et juin ou se baser sur la variation moyenne entre février et juin, s'il faut faire un calcul exact, dessiner ou visualiser une courbe de tendance, ou utiliser des estimations approximatives et remarquer que les ventes diminuent chaque mois d'un peu plus d'un niveau sur l'échelle en ordonnée. La *mathématisation* consiste à manipuler légèrement le modèle fourni par rapport au contexte, des calculs s'imposent (faire plusieurs soustractions de nombres à plusieurs chiffres, lire l'évolution sur une échelle), ce qui ajoute à la difficulté en matière d'*utilisation d'opérations et d'un langage symbolique, formel et technique*. L'item consiste à faire une inférence à propos de la relation tendancielle décrite dans le graphique en matière de *représentation*, et à enchaîner quelques étapes de *raisonnement*. Toutefois, cet item est relativement facile aussi : 76 % des élèves y ont répondu correctement (option B) lors de la campagne définitive du cycle PISA 2012.

■ Figure 1.5 ■

Items de l'unité *ASCENSION DU MONT FUJI*

ASCENSION DU MONT FUJI

Le mount Fuji est un célèbre volcan éteint, situé au Japon.

QUESTION 1

Le mont Fuji n'est accessible au public que du 1er juillet au 27 août chaque année. Environ 200 000 personnes font l'ascension du mont Fuji pendant cette période.

En moyenne, combien de personnes environ font l'ascension du mont Fuji chaque jour ?

A. 340

B. 710

C. 3 400

D. 7 100

E. 7 400

QUESTION 2

La voie Gotemba, qui conduit au sommet du mont Fuji, fait environ 9 kilomètres (km) de long.

Les marcheurs doivent être de retour de la randonnée de 18 km pour 20 heures.

Toshi estime qu'il peut gravir la montagne à une vitesse moyenne de 1,5 kilomètre/heure, et en redescendre en doublant cette vitesse. Ces vitesses tiennent compte des pauses-repas et des temps de repos.

D'après les vitesses estimées par Toshi, à quelle heure au plus tard doit-il commencer sa randonnée afin de pouvoir être de retour pour 20 heures ?

....

QUESTION 3

Lors de sa randonnée sur la voie Gotemba, Toshi portait un podomètre pour comptabiliser ses pas.

Son podomètre indique qu'il a fait 22 500 pas lors de la montée.

Estimez la longueur moyenne des pas de Toshi lors de la montée de 9 kilomètres de la voie Gotemba. Donnez votre réponse en centimètres (cm).

Réponse .... cm

ASCENSION DU MONT FUJI

La deuxième unité proposée à titre d'exemple s'intitule *ASCENSION DU MONT FUJI* (voir la figure 1.5). La première question est un item à choix multiple et les deux dernières, des items à réponse construite appelant une réponse sous forme de chiffre. Le troisième item permet l'octroi d'un *crédit partiel*, une forme de codage utilisée dans un pourcentage limité d'items PISA auxquels des réponses de qualité variable peuvent être données et sont associées à un niveau de compétence nettement différent.

L'unité *ASCENSION DU MONT FUJI* a été administrée lors de la campagne définitive du cycle PISA 2012 avant d'être rendue publique. Les questions 1 et 3 se classent dans la catégorie de contenus *Quantité*, car elles demandent aux élèves de faire des calculs sur la base de dates et de mesures, et de faire des conversions. La question 2 est basée sur le thème de la vitesse, ce qui la classe dans la catégorie de contenus *Variations et relations*.

Ces questions se classent toutes dans la catégorie de *Contextes sociétaux*, car les données se rapportent à des informations sur l'accès du public au mont Fuji. Les deux premières questions illustrent le processus qui consiste à *formuler des situations de façon mathématique*, puisqu'elles demandent essentiellement aux élèves de créer un modèle mathématique pour répondre à la question.

La question 3 se classe dans la catégorie de processus *Employer des concepts, faits, procédures et raisonnements mathématiques* parce qu'elle demande essentiellement aux élèves de calculer une moyenne en prenant garde de bien convertir des unités, et donc de travailler en grande partie sur la base des détails mathématiques du problème au lieu de rapporter ces détails à des aspects du contexte. Il ressort de la campagne définitive du cycle PISA 2012 que la difficulté de ces trois questions varie. La première question est moyennement difficile, alors que les deux dernières sont très difficiles.

La question 1 demande aux élèves de calculer un nombre moyen de personnes par jour. Comme le texte est simple et clair, il fait peu appel à la faculté de *communication*. La *stratégie* requise est d'une difficulté modérée, car elle consiste à trouver le nombre de jours entre les dates fournies, puis à l'utiliser pour calculer une moyenne. Cette solution en plusieurs étapes requiert un certain suivi, qui relève aussi de la faculté *Conception de stratégies*. La *mathématisation* est très facile, car les quantités mathématiques requises sont fournies directement dans la question (le nombre de personnes par jour). Il en va de même pour la *représentation*, car la question ne contient que du texte et des chiffres. Les élèves doivent utiliser des connaissances *techniques* : ils doivent savoir comment calculer une moyenne et le nombre de jours entre des dates, faire une division (à l'aide ou non d'une calculatrice, selon l'option retenue dans chaque pays) et arrondir le résultat. Cette question fait peu appel à la faculté de *raisonnement* et d'*argumentation*. Elle est d'une difficulté moyenne : 46 % des élèves y ont répondu correctement (option C) lors de la campagne définitive du cycle PISA 2012. Les réponses incorrectes les plus souvent choisies sont l'option E (19 % des élèves), auquel cas les élèves se sont basés sur 27 jours, au lieu d'additionner 31 et 27 jours, et l'option A (12 % des élèves), auquel cas les élèves ont commis une erreur de valeur.

La question 2 est nettement plus difficile : 12 % seulement des élèves y ont répondu correctement lors de la campagne définitive du cycle PISA 2012. Sa difficulté tient notamment au fait qu'il s'agit d'un item à réponse construite et non à choix multiple, de sorte que les élèves n'ont aucun indice sur les réponses possibles, mais de nombreux autres facteurs ajoutent à sa difficulté. Lors du cycle PISA 2012, quelque 61 % des élèves y ont répondu de manière incorrecte, sans toutefois l'omettre.

La faculté de *communication* n'intervient guère, de surcroît uniquement sous l'aspect de la réception, comme dans la question 1. Côté expression, les élèves doivent simplement fournir une réponse sous forme de chiffre. La *stratégie* est nettement plus difficile, car les élèves doivent établir un plan sur la base de trois grandes composantes. Les élèves doivent calculer les temps d'ascension et de descente à partir des vitesses moyennes, puis calculer l'heure de départ en fonction de l'heure d'arrivée et du temps que prend la randonnée. La *mathématisation* requise est assez difficile, car elle consiste à comprendre, par exemple, que le temps consacré aux pauses-repas est compris et que la randonnée commence par l'ascension et se termine par la descente. La *représentation* est minimale, car il suffit aux élèves d'interpréter un texte. L'*utilisation d'opérations et d'un langage symbolique, formel et technique* est assez difficile : les calculs sont relativement simples (même si diviser par le nombre décimal de 1,5 kilomètre/heure peut être difficile), mais ils demandent une précision constante et la formule à employer pour déduire le temps de la vitesse et de la distance est implicitement ou explicitement requise. Le *raisonnement* et l'*argumentation* sont relativement simples également.

La question 3 est également assez difficile. Elle consiste à calculer la longueur moyenne de pas à partir de la distance et du nombre de pas, et implique la conversion d'unités. Lors du cycle PISA 2012, 11 % des élèves ont obtenu un crédit

complet parce qu'ils ont indiqué la réponse correcte (40 cm) et 4 % ont obtenu un crédit partiel, parce qu'ils ont, par exemple, répondu « 0,4 » (laissant la longueur en mètres) ou « 4 000 » (sans doute à cause d'une erreur de conversion entre le mètre et le centimètre). Lors de la campagne définitive du cycle PISA 2012, 62 % des élèves y ont répondu de façon incorrecte, sans toutefois l'omettre. La faculté de *communication* intervient peu comme dans les questions précédentes, car le texte est relativement facile à comprendre et interpréter, et la question appelle une réponse sous forme de simple chiffre. La *stratégie* à utiliser pour répondre à la question 3 est similaire à celle décrite dans la question 1 – ces deux items consistent en effet à calculer une moyenne. Toutefois, si les deux questions consistent à calculer une moyenne, le *raisonnement* et l'*argumentation* sont nettement plus difficiles dans cette question que dans la première. Dans la question 1, les élèves doivent calculer un nombre de personnes par jour, sachant que le nombre de personnes est fourni et que le nombre de jours est facile à calculer. Dans la question 3, en revanche, ils doivent calculer la longueur moyenne de pas d'un individu à partir d'une distance totale et d'un nombre total de pas. Il faut un raisonnement plus poussé pour établir un lien entre ces quantités (entre la distance donnée et la longueur, par exemple). De même, la *mathématisation* est plus difficile dans cette troisième question, car les élèves doivent comprendre en quoi la longueur de pas, une variable du monde réel, est liée à des mesures globales. Apprécier le contexte, notamment savoir qu'un pas est susceptible d'être de l'ordre de 50 centimètres (et pas de 0.5 ou 500 centimètres) est utile pour juger de la plausibilité de la réponse. L'*utilisation d'opérations et d'un langage symbolique, formel et technique* est assez difficile, car les élèves doivent diviser un nombre peu élevé (9 kilomètres) par un nombre élevé (22 500 pas) et doivent connaître des facteurs de conversion. Cette question implique peu de *représentation*, car elle ne contient que du texte.

PIZZAS

L'item à réponse construite ouverte de l'unité *PIZZAS* (voir la figure 1.6) est présenté sous une forme simple, mais son contenu est riche : il illustre plusieurs éléments du cadre d'évaluation en mathématiques. Il a été administré lors du premier essai de terrain de l'enquête PISA, en 1999, puis a été rendu public pour servir d'exemple. Il illustre chaque version du cadre d'évaluation PISA en mathématiques depuis 2003. C'est l'un des items les plus difficiles de la batterie d'items utilisée lors de l'essai de terrain de 1999 : 11 % seulement des élèves y ont répondu correctement.

■ Figure 1.6 ■
Item de l'unité *PIZZAS*

Une pizzeria propose deux pizzas rondes de la même épaisseur, de tailles différentes. La plus petite a un diamètre de 30 cm et coûte 30 zeds. La plus grande a un diamètre de 40 cm et coûte 40 zeds.

Laquelle des deux pizzas est la plus avantageuse par son prix ? Indiquez votre raisonnement.

....

L'unité *PIZZAS* se situe dans un contexte *personnel*, vraisemblablement familier à de nombreux adolescents de 15 ans. Cet item se classe dans la catégorie *Contextes personnels*, car la question posée est de savoir quelle pizza est la plus avantageuse par son prix. Il n'est guère difficile à lire, ce qui permet aux élèves de se concentrer presque entièrement sur les aspects mathématiques de la tâche.

Des termes courants dans la vie de tous les jours doivent être interprétés de façon mathématique (« rondes », « même épaisseur », « tailles différentes »). La variable de *taille* est définie sous forme mathématique *via* les diamètres des deux pizzas. Le coût est indiqué dans une monnaie fictive, le *zed*. La taille et le coût sont mis en correspondance par l'expression « avantageuse par son prix ».

Cet item relève de plusieurs branches en mathématiques. Il devrait en principe se classer dans la catégorie de contenus *Espace et formes* puisqu'il contient des éléments géométriques. Les pizzas peuvent être modélisées sous la forme de fins cylindres circulaires, ce qui nécessite le calcul de la surface d'un cercle. Cet item pourrait aussi se classer dans la catégorie de contenus *Quantité* à cause de la nécessité implicite de comparer des quantités de pizza par rapport à leur prix. Toutefois, toute la difficulté de l'item tient à la conceptualisation des relations entre les propriétés des pizzas et à la façon dont les propriétés pertinentes changent entre la petite et la grande pizza. Comme ces aspects sont au cœur du problème, cet item se classe dans la catégorie de contenus *Variations et relations*.

Cet item se classe dans la catégorie de processus *Formulation*. L'étape clé pour résoudre ce problème, difficile sur le plan cognitif, consiste à formuler un modèle mathématique qui décrit le concept que recèle l'expression « avantageuse par son prix ». Les élèves doivent comprendre que comme l'épaisseur des pizzas est en principe uniforme et qu'elle est identique dans les deux pizzas, ils doivent concentrer leur analyse sur la superficie circulaire des pizzas et non sur leur volume ou leur quantité. La relation entre la quantité de pizza et la quantité d'argent est à intégrer dans le concept

de l'expression « avantageuse par son prix », soit le coût par unité de superficie. La superficie par coût unitaire est une autre variante possible. En mathématiques, le coût peut être calculé directement, puis comparé entre les deux pizzas : le coût du cercle plus grand est inférieur. Dans le monde réel, l'interprétation est que la grande pizza est meilleure marché.

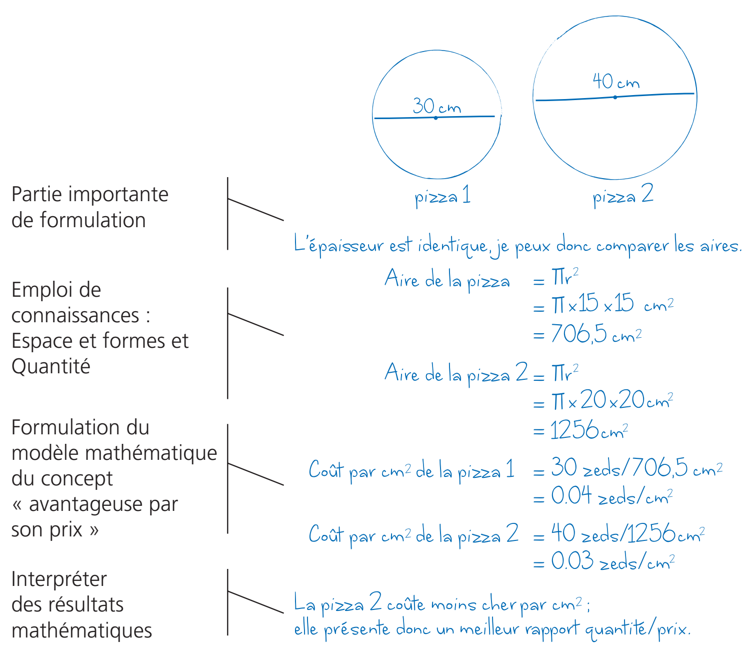
Un autre raisonnement, qui montre plus clairement encore pourquoi cet item se classe dans la catégorie de contenus *Variations et relations*, serait de postuler (implicitement ou explicitement) que la superficie d'un cercle augmente en proportion du carré de son diamètre, soit de $(4/3)^2$, alors que le coût n'augmente que dans une proportion de (4/3). Comme $(4/3)^2$ est supérieur à (4/3), la grande pizza est meilleure marché.

Comme toute la difficulté de l'item consiste à formuler ses aspects de façon mathématique, il se classe dans la catégorie de processus *Formuler des situations de façon mathématique*. Des aspects des deux autres catégories de processus y sont également manifestes. Les élèves doivent employer à bon escient le modèle une fois qu'ils l'ont formulé, se livrer à un raisonnement approprié et utiliser des connaissances mathématiques en matière de surface et de proportions. Ils doivent ensuite interpréter le résultat pour le replacer dans le contexte de la question.

Pour résoudre cet item de l'unité *PIZZAS*, les élèves doivent exploiter leurs facultés mathématiques fondamentales à des degrés divers. La *communication* intervient relativement peu lorsqu'il s'agit de lire et d'interpréter l'énoncé qui est assez direct, mais intervient davantage lorsqu'il s'agit de présenter et d'expliquer la solution. La *mathématisation* est à la clé du problème : les élèves doivent en effet formuler un modèle pour décrire le concept « avantageuse par son prix ». Les élèves doivent créer une *représentation* des aspects pertinents du problème, notamment la représentation symbolique de la formule permettant de calculer la superficie et l'expression de taux qui représentent le concept « avantageuse par son prix », pour élaborer leur solution. Les *raisonnements* (pour décider que l'épaisseur peut être ignorée et justifier l'approche adoptée et les résultats obtenus) sont considérables et la *conception de stratégies* permettant de contrôler les calculs et les processus de modélisation est un aspect difficile dans ce problème. L'*utilisation d'opérations et d'un langage symbolique, formel et technique* s'impose, car les élèves doivent utiliser leurs connaissances en matière de concepts, de faits et de procédures pour aborder la géométrie des cercles et calculer les taux. L'*utilisation d'outils mathématiques* n'est guère difficile si les élèves savent utiliser correctement une calculatrice.

■ Figure 1.7 ■

Exemple de réponse à l'item de l'unité *PIZZAS*



DÉCHETS

L'item *DÉCHETS* (voir la figure 1.8) illustre lui aussi certains aspects du cadre d'évaluation de la culture mathématique. Cet item à réponse construite a été administré lors de la campagne définitive du cycle PISA 2003 avant d'être rendu public. Le pourcentage de réponses correctes à cet item s'établit à 51 %, en moyenne, dans les pays de l'OCDE, ce qui le place au milieu du spectre de difficulté de la batterie d'items.

■ Figure 1.8 ■
Item de l'unité *DÉCHETS*

Pour un devoir portant sur l'environnement, des élèves ont recueilli des informations sur le temps de décomposition des différents types de déchets que les gens jettent :

Type de déchets	Temps de décomposition
Peau de banane	1-3 ans
Pelure d'orange	1-3 ans
Boîtes en carton	0,5 année
Chewing gum	20-25 ans
Journaux	Quelques jours
Gobelets en polystyrène	Plus de 100 ans

Un élève envisage de présenter ces résultats sous forme d'un diagramme en bâtons.

Donnez une raison pour laquelle le diagramme en bâtons ne conviendra pas pour présenter ces données.

....

Cet item se classe dans la catégorie *Contextes scientifiques*, car il porte sur un sujet scientifique (le temps de décomposition), et dans la catégorie de contenus *Incertitude et données*, dans la mesure où il présente des données à interpréter, même si des contenus *Quantité* interviennent implicitement, puisque les élèves doivent apprécier l'importance relative des temps indiqués. Il se classe dans la catégorie de processus *Interpréter, appliquer et évaluer des résultats mathématiques*, car il demande essentiellement aux élèves d'évaluer l'adéquation d'un résultat mathématique (en l'occurrence un diagramme en bâtons fictif ou dessiné) pour décrire des données sur des éléments contextuels qui s'inspirent du monde réel. Cet item consiste à faire un raisonnement à propos des données fournies, à réfléchir sous l'angle mathématique à la relation entre les données et leur présentation, et à évaluer le résultat. Les élèves doivent comprendre qu'il ne serait pas judicieux de présenter ces données dans un diagramme en bâtons pour une des deux raisons suivantes : soit à cause de la très grande variance des temps de décomposition selon les déchets (qu'il n'est pas possible de représenter sous la forme d'un diagramme en bâtons standard), soit à cause de la variabilité des données dans certaines catégories (de sorte que sur un axe représentant le temps qui permettrait d'indiquer le temps de décomposition le plus long, les temps de décomposition les plus courts seraient invisibles). Les réponses telles que celles reproduites ci-dessous valent un crédit.

RÉPONSE 1

« Parce que ce serait difficile à faire dans un diagramme en bâtons puisqu'il y a 1-3, 1-3, 0.5, etc. Ce serait difficile de le faire exactement. »

RÉPONSE 2

« Parce qu'il y a une grande différence entre le chiffre le plus élevé et le chiffre le moins élevé, ce serait donc difficile d'être précis avec 100 ans et quelques jours ».

La résolution de l'item *DÉCHETS* passe par l'activation des facultés mathématiques fondamentales suivantes. La *communication* intervient à cause de la nécessité de lire le texte et d'interpréter le tableau et, dans une plus grande mesure, de la nécessité de rédiger un raisonnement succinct. La *mathématisation* de la situation n'est guère difficile, dans la mesure où les élèves doivent identifier et extraire des caractéristiques mathématiques clés d'un diagramme en bâtons dans chaque catégorie de déchets. Les élèves doivent interpréter des données présentées sous forme de tableau, puis imaginer une *représentation* graphique, avant d'établir un lien entre les deux représentations, ce qui est tout l'enjeu de l'item. Le *raisonnement* requis est relativement facile, tout comme la *conception de stratégies*. L'*utilisation*

d'opérations et d'un langage symbolique, formel et technique intervient, car les élèves doivent connaître des faits et des procédures pour imaginer ou dessiner un diagramme en bâtons et, surtout, comprendre l'échelle à employer pour imaginer l'ordonnée. L'*utilisation d'outils mathématiques* est selon toute vraisemblance inutile.

CONCERT ROCK

Un autre exemple d'item, tiré de l'unité *CONCERT ROCK* est présenté dans la figure 1.9. Cet item à choix multiple simple a été administré lors de l'essai de terrain précédant la campagne définitive du cycle PISA 2003. Il a été rendu public par la suite pour donner un aperçu des épreuves. Dans la batterie d'items utilisée lors de cet essai de terrain, il se classe parmi ceux d'une difficulté modérée : quelque 28 % des élèves y ont répondu correctement (option C). Cet item se classe dans la catégorie des *Contextes sociétaux*, car il concerne l'organisation d'un concert de rock, même s'il évoque une expérience personnelle, en l'occurrence celle de se trouver au milieu de la foule. Il se classe dans la catégorie de contenus *Quantité* parce qu'il requiert un calcul, même s'il contient quelques éléments en rapport avec la catégorie *Espace et formes*.

■ Figure 1.9 ■

Item de l'unité *CONCERT ROCK*

Un terrain rectangulaire mesurant 100 m sur 50 m a été réservé pour le public d'un concert de rock.
Toutes les places ont été vendues et le terrain est plein de fans, tous debout.

Lequel des nombres ci-dessous est probablement la meilleure estimation du nombre total de personnes assistant au concert ?

A. 2 000

B. 5 000

C. 20 000

D. 50 000

E. 100 000

Cet item fait appel aux trois catégories de processus, mais surtout à celui qui consiste à *formuler des situations de façon mathématique*, car il demande aux élèves de donner un sens aux informations contextuelles qui leur sont fournies (la forme et les dimensions du terrain, et le fait que le concert affiche complet et que les fans sont debout). Les élèves doivent également identifier l'information manquante, qu'ils peuvent toutefois estimer sans trop de mal en se basant sur des hypothèses et des connaissances de la vie réelle. Ils doivent plus précisément concevoir un modèle pour déterminer l'espace requis par un individu ou un groupe de fans. En mathématiques, ils doivent *employer des concepts, faits, procédures et raisonnements mathématiques* pour établir un lien entre la superficie du terrain et l'espace occupé par un fan ou un groupe de fans, et établir les comparaisons qui s'imposent, puis *interpréter, appliquer et évaluer des résultats mathématiques* pour vérifier la plausibilité de leur solution ou comparer les options de réponse aux résultats mathématiques de leurs calculs.

Il y a également un autre modèle. Les élèves peuvent aussi imaginer des rangées uniformes de fans debout sur toute la superficie du terrain, puis estimer le nombre de fans en multipliant leur estimation du nombre de rangées par leur estimation du nombre de fans par rangée. Les élèves doués pour formuler des modèles mathématiques sont susceptibles d'apprécier l'efficacité de ce modèle, en dépit du contraste important qu'il présente avec le comportement de fans à un concert de rock. La réponse correcte vaut un crédit complet, quel que soit le modèle utilisé par les élèves.

Les facultés mathématiques fondamentales interviennent dans cet item de la façon suivante. Les facultés en *communication* sont relativement peu mises à contribution, car il suffit aux élèves de lire et de comprendre le texte. L'importance mathématique de termes tels que « mesurant » et « rectangulaire », la phrase « le terrain est plein » et le substantif « estimation » employé dans la consigne doivent être compris, puis interprétés. Des connaissances du monde réel peuvent être utiles pour ce faire. Cet item passe par un processus assez complexe de *mathématisation*, car il demande aux élèves de formuler des hypothèses sur l'espace qu'une personne occupe debout et de créer un modèle de base du type : « nombre de fans » x « espace moyen d'un fan » = « superficie du terrain ». Les élèves doivent se *représenter* la situation mentalement ou la dessiner pour concevoir le modèle qui établit un lien entre l'espace occupé par un fan et la superficie du terrain. La *conception de stratégies* intervient à plusieurs stades du processus de résolution, notamment lorsque les élèves décident de la façon dont ils vont aborder le problème, imaginent le modèle qui pourrait se révéler utile pour estimer l'espace occupé par un fan lors d'un concert et comprennent qu'ils vont devoir en passer par quelques étapes de vérification et de validation. Les élèves peuvent choisir, à titre de stratégie de résolution, de postuler l'espace par personne, de le multiplier par le nombre de personnes fourni dans chaque option de réponse, puis de comparer le résultat aux conditions indiquées dans la question. Ils peuvent aussi faire l'inverse, en l'occurrence partir de la superficie fournie et calculer l'espace par personne qu'implique chaque option de réponse, puis identifier la réponse qui satisfait le mieux aux critères indiqués dans la question. L'*utilisation d'opérations et d'un langage symbolique, formel et technique* intervient une fois que les élèves appliquent la stratégie qu'ils ont adoptée, quelle qu'elle soit, pour interpréter et utiliser les dimensions fournies, et faire les calculs requis pour mettre en correspondance la superficie du terrain et l'espace occupé par un individu. Les facultés de *raisonnement* et d'*argumentation* interviennent, car les élèves doivent bien réfléchir à la relation entre le modèle qu'ils ont conçu, la solution qu'ils ont obtenue et le contexte réel, pour valider leur modèle et vérifier qu'ils ont choisi la réponse correcte. L'*utilisation d'outils mathématiques* est vraisemblablement superflue.

MARCHE À PIED

L'unité PISA *MARCHE À PIED* (voir la figure 1.10) montre une relation algébrique quelque peu illogique mais bien établie entre deux variables, sur la base de l'observation d'un grand nombre d'individus marchant d'un pas naturel, et pose aux élèves deux questions qui leur demandent d'exploiter leurs connaissances et compétences en algèbre. Dans la deuxième question, ils doivent également faire usage de leurs facultés de réflexion stratégique, de raisonnement et d'argumentation dans une mesure qui est difficile pour de nombreux adolescents de 15 ans. Ces deux items ont été administrés lors de la campagne définitive du cycle PISA 2003, puis ont illustré le cadre d'évaluation du cycle PISA 2009 et d'autres publications. Ils demandent tous deux aux élèves de se baser sur les informations qui leur sont fournies pour construire leur réponse. Ils se classent tous deux dans la catégorie de contenus *Variations et relations*, car ils portent sur des relations entre variables exprimées sous forme algébrique. Ils se classent dans la catégorie des *Contextes personnels*, car ils se rapportent à des aspects en rapport direct avec des perspectives et le vécu d'individus, et dans la catégorie de processus *Employer des concepts, faits, procédures et raisonnements mathématiques*, puisque les problèmes sont formulés en des termes qui possèdent déjà une structure mathématique et que leur résolution passe par une manipulation largement intramathématique d'objets et de concepts mathématiques.

■ Figure 1.10 ■
Items de l'unité *MARCHE À PIED*

L'image montre les traces de pas d'un homme en train de marcher. La longueur de pas L est la distance entre l'arrière de deux traces de pas consécutives.

Pour les hommes, la formule $\frac{n}{L} = 140$ donne un rapport approximatif entre n et L où :

n = nombre de pas par minutes ; et

L = longueur de pas en mètres.

QUESTION 1

Si la formule s'applique à la façon de marcher d'Henri et qu'Henri fait 70 pas par minute, quelle est la longueur de pas d'Henri ? Montrez vos calculs.

....

QUESTION 2

Bernard sait que la longueur de son pas est de 0,80 mètre. La formule s'applique à sa façon de marcher.

Calculez la vitesse à laquelle marche Bernard en mètres par minute et en kilomètres par heure. Montrez vos calculs.

....

Lors de la campagne définitive du cycle PISA 2003, 36 % des élèves ont répondu correctement à la question 1, ce qui en fait un item plus difficile que 70 % environ des items administrés lors de ce cycle. C'est surprenant car mathématiquement parlant, il ne leur demande que de remplacer la valeur $n = 70$ dans la formule et de manipuler la formule algébriquement, de façon assez directe, pour obtenir la valeur de L. Cet item confirme ce qui s'observe dans de nombreux items PISA : lorsque les items s'inscrivent dans un contexte qui s'inspire du monde réel, les élèves éprouvent souvent des difficultés à utiliser efficacement leurs connaissances et compétences en mathématiques, et ce même si les composantes mathématiques sont présentées clairement dans la question.

Les facultés mathématiques fondamentales interviennent comme suit dans cet item. Les facultés de *communication* sont à exploiter pour lire et comprendre le stimulus, puis pour articuler la solution et montrer le cheminement. Cet item ne demande pas véritablement de *mathématisation*, car le modèle mathématique est fourni sous une forme familière pour de nombreux élèves âgés de 15 ans. Les facultés de *représentation* sont à exploiter dans une mesure significative, car le stimulus inclut un élément graphique, du texte et une expression algébrique que les élèves doivent mettre en correspondance. Les facultés de *conception de stratégies* interviennent très peu dans le processus de résolution, car la stratégie à adopter est formulée de manière très claire dans la question. Les facultés de *raisonnement* et d'*argumentation* ne jouent qu'un rôle minime parce qu'une nouvelle fois, cette tâche est formulée de manière claire et que tous les éléments requis sont évidents. L'*utilisation d'opérations et d'un langage symbolique, formel et technique* s'impose pour procéder à la substitution et manipuler l'expression pour faire en sorte que L devienne le sujet de l'équation.

La question 2 est plus difficile : 20 % seulement des élèves y ont répondu correctement. Elle se classe donc parmi les 10 % d'items les plus difficiles qui aient été administrés lors du cycle PISA 2003. La *conception de la stratégie* est complexe, car les élèves ont un certain nombre d'étapes à franchir et doivent garder en ligne de mire le point final : comme la valeur de L est connue, ils peuvent trouver la valeur de n à partir de l'équation fournie ; ils doivent multiplier n par L pour obtenir la vitesse en mètres par minute, puis se livrer à un raisonnement proportionnel pour convertir cette vitesse en kilomètre par heure. Trois niveaux de crédit étaient prévus pour permettre de coder des réponses n'exposant que partiellement le raisonnement attendu pour la résolution du problème. La meilleure façon d'expliquer la différence de pourcentage de réponses correctes entre la question 2 et la question 1 est probablement de décrire les différents modes d'activation des facultés mathématiques fondamentales requis. Les élèves doivent utiliser leurs facultés de *communication* de manière comparable dans les deux questions lors de l'étape qui consiste à lire et comprendre la question, mais dans la question 2, ils doivent se servir du diagramme pour créer explicitement un lien entre un pas et la longueur de pas fournie – une relation qu'il est inutile d'établir dans la question 1. De plus, la présentation de la solution fait davantage appel à des facultés d'expression dans la question 2. Les élèves doivent passer par un processus de *mathématisation* puisqu'ils doivent concevoir un modèle proportionnel pour exprimer la vitesse de Bernard dans les unités requises pour résoudre le problème. Pour arriver à cette solution, les élèves doivent faire appel à des mécanismes de contrôle efficaces et soutenus dans le cadre d'un processus à étapes multiples ; les facultés de *conception de stratégies* interviennent donc à un niveau bien plus élevé que dans la question 1. La *représentation* intervient plus que dans la question 1, car les élèves doivent travailler plus activement avec la représentation algébrique qui leur est fournie. La mise en œuvre de la stratégie conçue et l'exploitation des représentations identifiées impliquent l'*utilisation d'opérations et d'un langage symbolique, formel et technique*, ce qui consiste à faire des manipulations algébriques, à appliquer des proportions et à faire des opérations arithmétiques pour procéder aux conversions requises. Les élèves doivent utiliser leurs facultés de *raisonnement* et d'*argumentation* dans toutes les étapes interdépendantes qu'ils doivent enchaîner pour parvenir à la solution. L'*utilisation d'outils mathématiques* intervient dans une mesure relativement faible si les élèves se servent bien de leur calculatrice.

MENUISIER

L'item PISA *MENUISIER* (voir la figure 1.11) a été administré lors des cycles PISA 2000 et 2003, avant d'être rendu public. Il illustre un format d'items à choix multiple dit « complexe » : les élèves doivent sélectionner une réponse parmi celles proposées dans plusieurs questions successives. Dans cet item, les élèves obtiennent un crédit complet s'ils répondent que tous les tracés, sauf le tracé B, peuvent être réalisés avec les planches fournies.

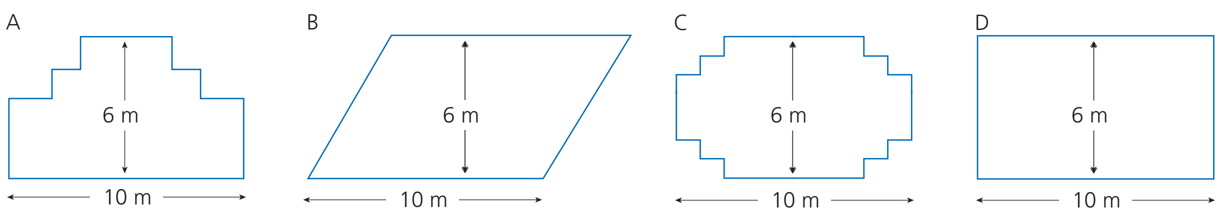
Cet item se classe dans la catégorie de contenus *Espace et formes*, car il porte sur des propriétés de formes, et dans la catégorie des *Contextes professionnels*, car il concerne un travail de menuiserie. Il se classe dans la catégorie de processus *Employer des concepts, faits, procédures et raisonnements mathématiques*, car il consiste en grande partie à appliquer des connaissances en matière de procédures à des objets bien définis, même si les élèves doivent aussi dans une certaine mesure *interpréter, appliquer et évaluer des résultats mathématiques*, puisqu'ils doivent établir un lien entre les objets mathématiques représentés et l'élément contextuel – la contrainte imposée par la quantité de planches disponibles.

C'est l'un des items les plus difficiles des épreuves du cycle PISA 2003 : un peu moins de 20 % des élèves y ont répondu correctement. Pour le résoudre, les élèves peuvent utiliser leurs connaissances en géométrie et leurs facultés de raisonnement. Ils disposent de suffisamment d'informations pour calculer directement le périmètre exact des tracés A, C et D, qui est de 32 mètres. Toutefois, ils manquent d'informations pour le faire à propos du tracé B et doivent donc asdopter une autre approche. Ils peuvent se livrer au raisonnement suivant : les segments « horizontaux » des quatre tracés sont équivalents, mais les segments obliques du tracé B sont plus longs que la somme des segments « verticaux » des autres tracés.

Cet item fait appel aux facultés de *communication* des élèves, en l'occurrence pour lire et comprendre la question, et pour établir un lien entre les informations fournies dans le texte et la *représentation* graphique des quatre tracés. L'item ne nécessite pas de *mathématisation* puisqu'il est présenté de façon explicitement mathématique. Des considérations qui s'inspirent du monde réel, telles que la longueur des planches disponibles et la géométrie des angles, ne posent pas de problème particulier. Les élèves doivent essentiellement utiliser leurs facultés de *raisonnement* et d'*argumentation* pour comprendre que le périmètre du tracé B est trop important et qu'ils connaissent la longueur totale des segments « verticaux » du tracé A (elle est similaire à celle des segments horizontaux et verticaux du tracé C), même si leur longueur spécifique leur est inconnue. En matière de *conception de stratégies*, ils doivent se rendre compte qu'ils peuvent estimer les périmètres, même en l'absence de données sur la longueur de certains segments. L'*utilisation d'opérations et d'un langage symbolique, formel et technique* intervient pour comprendre et manipuler le périmètre des formes présentées, y compris les propriétés des côtés, et additionner les longueurs des côtés. L'*utilisation d'outils mathématiques* est vraisemblablement superflue.

■ Figure 1.11 ■
Item de l'unité *MENUISIER*

Un menuisier dispose de 32 mètres de planches et souhaite s'en servir pour faire la bordure d'une plate-bande dans un jardin. Il envisage d'utiliser un des tracés suivants pour cette bordure :



Indiquez, pour chacun des tracés, s'il peut être réalisé avec les 32 mètres de planches. Répondez en entourant « Oui » ou « Non ».

Tracé de la bordure	En utilisant ce tracé, peut-on réaliser la plate-bande avec 32 mètres de planches ?
Tracé A	Oui / Non
Tracé B	Oui / Non
Tracé C	Oui / Non
Tracé D	Oui / Non

Notes

1. Le terme « construct » a volontairement été laissé en anglais, car il est d'usage courant dans la terminologie technique relative aux tests ; il renvoie à la dimension latente que cherche à mesurer une épreuve grâce aux données observables que constituent les réponses des élèves.

2. Dans certains pays, les « outils mathématiques » peuvent aussi désigner des procédures mathématiques établies, telles que les algorithmes. Dans le cadre PISA, les « outils mathématiques » désignent uniquement les outils physiques et numériques décrits dans cette section.

3. Les normes en vigueur ont été analysées dans deux groupes de pays, constitués d'une part de neuf pays membres de l'OCDE, à savoir l'Australie (Nouvelle-Galles-du-Sud), la Belgique (Communauté flamande), le Canada (Alberta), la Corée, la Finlande, l'Irlande, le Japon, la Nouvelle-Zélande et le Royaume-Uni, et, d'autre part, de six pays très performants, à savoir la Belgique (Communauté flamande), le Canada (Alberta), la Corée, la Finlande, Singapour et le Taipei chinois. L'une des exigences formulées dans le cadre de cette analyse était que les normes soient disponibles en anglais.

4. Ceux qui connaissent les cadres d'évaluation précédents constateront que la catégorie Incertitude s'appelle désormais Incertitude et données. Ce changement d'appellation vise à décrire la catégorie plus clairement et n'est pas le signe d'un remaniement fondamental de la catégorie.

5. Une épreuve informatisée a fait l'objet d'une expérience pilote en sciences lors du cycle PISA 2006 et en compréhension de l'écrit lors du cycle PISA 2009.

Références

Bennett, R. (2003), *Online Assessment and the Comparability of Score Meaning*, Educational Testing Service, Princeton, New Jersey, *www.ets.org/Media/Research/pdf/RM-03-05-Bennett.pdf.*

Bennett, R.E., J. Braswell, A. Oranje, B. Sandene, B. Kaplan et **F. Yan** (2008), « Does it Matter if I Take My Mathematics Test on Computer? A Second Empirical Study of Mode Effects in NAEP », *Journal of Technology, Learning, and Assessment*, vol. 9, nº 6.

Common Core State Standards Initiative (2010), *Common Core State Standards for Mathematics*, Common Core State Standards Initiative, Washington, DC, *http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf.*

Devlin, K. (1994), *Mathematics : The Science of Patterns: The Search for Order in Life, Mind and the Universe*, W.H. Freeman Scientific American Library, New York.

Hoyles, C., A. Wolf, S. Molyneux-Hodgson et **P. Kent** (2002), *Mathematical Skills in the Workplace: Final Report to the Science Technology and Mathematics Council,* Project Report, Institute of Education, Université de Londres, Science, Technology and Mathematics Council, Londres, *http://eprints.ioe.ac.uk/1565/1/Hoyles2002MathematicalSkills.pdf.*

Mason, B., M. Patry et **D. Berstein** (2001), « An Examination of the Equivalence Between Non-adaptive Computer Based and Traditional Testing », *Journal of Education Computing Research*, vol. 1, nº 24, pp. 29-39.

Moore, D. (1997), « New Pedagogy and New Content: The Case of Statistics », *International Statistical Review*, vol. 2, nº 65, pp. 123-137.

National Council of Teachers of Mathematics (2000), *Principles and Standards for School Mathematics*, NCTM, Reston, Virginie, *http://www.nctm.org/standards/.*

Niss, M. et **T.H. Jensen** (2002), *Kompetencer og matematiklæring: Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*, Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie, nº 18, ministère de l'Éducation, Copenhague, *http://pub.uvm.dk/2002/kom/.*

Niss, M. (2003), « Mathematical Competencies and the Learning of Mathematics: The Danish KOM Project », in A. Gagatsis et S. Papastavridis (éd.), *3rd Mediterranean Conference on Mathematics Education,* The Hellenic Mathematical Society and Cyprus Mathematical Society, Athènes, pp. 115-124, *http://w3.msi.vxu.se/users/hso/aaa_niss.pdf.*

Niss, M., W. Blum et **P. Galbraith** (2007), « Introduction », in Blum, W., P. Galbraith, H.-W. Henn et M. Niss (éd.), *Modelling and Applications in Mathematics Education (The 14th ICMI Study),* Springer, New York, pp. 3-32.

Niss, M. et **T. Højgaard** (éd.) (2011), « Competencies and Mathematical Learning: Ideas and Inspiration for the Development of Mathematics Teaching and Learning in Denmark », ministère de l'éducation, rapport nº 485, Université de Roskilde, Roskilde, *https://pure.au.dk/portal/files/41669781/THJ11_MN_KOM_in_english.pdf.*

OCDE (2003), *Cadre d'évaluation de PISA 2003 – Connaissances et compétences en mathématiques, lecture, science et résolution de problèmes*, PISA, Éditions OCDE.

OCDE (2010), *Pathways to Success: How Knowledge and Skills at Age 15 Shape Future Lives in Canada,* PISA, Éditions OCDE, *www.oecd.org/dataoecd/59/35/44574748.pdf.*

Qualifications and Curriculum Authority (2007), « Mathematics: Programme of Study for Key Stage 3 and Attainment Targets », Qualifications and Curriculum Authority, Londres, *http://media.education.gov.uk/assets/files/pdf/q/mathematics%202007%20programme%20of%20study%20for%20key%20stage%203.pdf.*

Richardson, M., J.-A. Baird, J. Ridgway, M. Ripley, D. Shorrocks-Taylor et **M. Swan** (2002), « Challenging Minds? Students' perceptions of Computer-based World Class Tests of Problem Solving », *Computers in Human Behavior,* vol. 18, nº 6, novembre, pp. 633-649.

Sandene, B., N. Horkay, R. Bennett, N. Allen, J. Braswell, B. Kaplan et **A. Oranje** (2005), *Online Assessment in Mathematics and Writing: Reports From the NAEP Technology-Based Assessment Project*, Research and Development Series (NCES 2005, 57), US Department of Education, National Center for Education Statistics, Washington, DC, US Government Printing Office, *http://nces.ed.gov/nationsreportcard/pdf/studies/2005457_1.pdf.*

Stacey, K. et **D. Wiliam** (2013), « Technology and Assessment in Mathematics », in M.A. Clements (Ken), A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick et F. Leung (éd.), *Third International Handbook of Mathematics Education*, Springer, pp. 721-752.

Steen, L. (1990), *On the Shoulders of Giants: New Approaches to Numeracy*, National Academy Press Washington, DC.

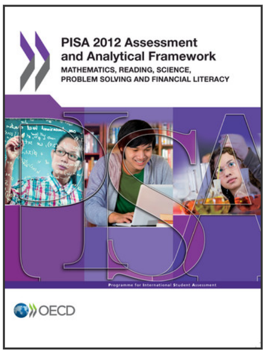
Thomson, S. et **K. Hillman** (2010), *Against the Odds: Influences on the Post-School Success of 'Low Performers'*, NCVER, Adélaïde, *http://www.ncver.edu.au/publications/2285.html.*

Turner, R. (2012), « Some Drivers of Test Item Difficulty in Mathematics », dossier présenté lors de la réunion annuelle de l'American Educational Research Association (AERA), 13-17 avril 2012, Vancouver, *http://research.acer.edu.au/pisa/4/.*

Turner, R. et **R.J. Adams** (2012), « Some Drivers of Test Item Difficulty in Mathematics: An Analysis of the Competency Rubric », dossier présenté lors de la réunion annuelle de l'American Educational Research Association (AERA), 13-17 avril 2012, Vancouver, *http://research.acer.edu.au/pisa/7/.*

Turner, R., J. Dossey, W. Blum et **M. Niss** (à paraître), « Using Mathematical Competencies to Predict Item Difficulty in PISA », in M. Prenzel, M. Kobarg, K Schöps et S. Rönnebeck (éd.), *Research on PISA: Research Outcomes of the PISA Research Conference 2009*, Springer, New York, pp. 23-27.

Watson, J.M. et **R. Callingham** (2003), « Statistical Literacy: A Complex Hierarchical Construct », *Statistics Education Research Journal*, vol. 2, nº 2, pp. 3-46.



Extrait de :

PISA 2012 Assessment and Analytical Framework

Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy

Accéder à cette publication :

https://doi.org/10.1787/9789264190511-en

Merci de citer ce chapitre comme suit :

OCDE (2013), « Cadre d'évaluation de la culture mathématique du cycle PISA 2012 », dans *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework : Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*, Éditions OCDE, Paris.

DOI: https://doi.org/10.1787/9789264190559-3-fr